

Feuille d'exercices 7 bis
Fonctions trigonométriques réciproques
Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

Exercice 1.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Montrer que f est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Pour les valeurs où cela ne pose pas de problème calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f .
4. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$$

Que peut-on en déduire sur le graphe de f en $x = -1$ et $x = 1$?

5. Tracer le graphe de f .

Exercice 2.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ? (Soyez précis sur les justifications).
2. Calculer la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème, sur quel ensemble est-elle dérivable ?
3. Déterminer le signe de f sur son ensemble de définition.

Exercice 3.

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. Calculer la dérivée de f en tout point où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variation et dresser sommairement le graphe de f .
5. Donner une expression plus simple de f pour $x < 0$, puis pour $x > 0$.

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition et préciser l'ensemble où f est continue.
2. Calculer la dérivée de f et préciser l'ensemble où f est dérivable.
3. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.
4. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f .

Exercice 5.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arcsin(1 - 2\cos^4(x))$

1. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .

- Montrer que f est 2π périodique, quelle est la parité de f ? En déduire un intervalle d'étude I .
- Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée de f . On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.
- Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable ? Préciser la valeur des limites de $f'(x)$ à droite au point d'abscisse 0 et à gauche au point d'abscisse π .
- Dresser le tableau de variation de f
- Tracer son graphe sur trois périodes

Exercice 6.

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

- Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
- Calculer la dérivée de f en tout point où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Dresser le tableau de variation et dresser sommairement le graphe de f .
- Donner une expression plus simple de f pour $x < 0$, puis pour $x > 0$.

Exercice 7.

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(u) = \frac{3 + 4 \operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)}$$

- Préciser son domaine de définition.
- Préciser ses limites quand u tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
- Etudier les variations de f . On veillera à fournir une expression très simple de la valeur u_0 pour laquelle $f'(u_0) = 0$.
- Tracer le graphe de f .

Exercice 8.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}(x) + 4\operatorname{sh}(x) + 2}{\operatorname{ch}(x) - 1}$$

- Sur quel ensemble la fonction est-elle définie et continue ?
- Montrer que
 -

$$f'(x) = \frac{-3 \operatorname{sh}(x) - 4 \operatorname{ch}(x) + 4}{(\operatorname{ch}(x) - 1)^2}$$

- Puis que

$$f'(x) = -\frac{14e^x \left(e^x - \frac{1}{7}\right)}{(e^x - 1)^3}$$

- En déduire les variations de f
- Calculer les limites au bord de son ensemble de définition.

Exercice 9.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) + 1}{\operatorname{ch}(x) - 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Étudier les variations de f .
4. Dresser le tableau de variation de f .
5. Tracer le graphe de f .

Exercice 10.

Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \operatorname{argth}\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right)$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
2. Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f . Tracer le graphe de f .

Exercice 11.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P du quatrième degré tel que pour tout réel x :

$$16x^6 + 24x^4 + 9x^2 + 1 = (x^2 + 1)P(x)$$

et expliciter ce polynôme.

2. Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \operatorname{argsh}(3x + 4x^3)$$

- a) Préciser l'ensemble de définition de f , puis l'ensemble des points où elle est dérivable.
- b) Aux points où f est dérivable, calculer $f'(x)$. En déduire une expression plus simple de $f(x)$.

Exercice 12.

Donner une expression plus simple de :

$$f(x) = \operatorname{argch}\left(\sqrt{\frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{2}}\right)$$

$$g(x) = \operatorname{argsh}\left(2x\sqrt{1 + x^2}\right)$$

$$h(x) = \operatorname{argth}\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$$

Exercice 13.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(u) = 3 \operatorname{ch}(u) - 4$ et soit g la fonction définie par

$$g(u) = \arcsin(3 \operatorname{ch}(u) - 4)$$

1. Montrer que pour tout réel u :

$$u \in [-\ln(3), \ln(3)] \Leftrightarrow f(u) \in [-1, 1]$$

2. Déterminer l'ensemble de définition de g , et préciser l'ensemble des points où g est continue.
3. En précisant son domaine de validité, montrer la formule :

$$g'(u) = \frac{3 \operatorname{sh}(u)}{\sqrt{3(\operatorname{ch}(u) - 1)(5 - 3 \operatorname{ch}(u))}}$$

4. Déterminer les limites de cette expression aux bornes de son domaine de validité.

(Suggestion : pour l'un des calculs de cette question, on remarquera que $\operatorname{sh}^2(u) = \operatorname{ch}^2(u) - 1$.)

5. Déterminer l'ensemble des points où g est dérivable.
6. Dresser le tableau de variations de g puis tracer sommairement son graphe.