Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Math I - CPGEI

Devoir n° 4

PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans lui même. On considère l'équation différentielle sur (E) :

$$(1+x^2)y'(x) + y(x) = f(x),$$

1. On suppose que $f = 0$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).
2. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(x)e^{-\arctan(x)}$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
   Indication : on pourra utiliser la méthode de la variation de la constante
3. On suppose que $f = C$ où C est une constante réelle. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire les solutions des équations différentielles suivante :

$$(1+x^2)y'(x) + y(x) = y(0),$$

$$(1+x^2)y'(x) + y(x) = 2y(0).$$

Exercice 2. L'objectif de cet exercice est de résoudre, sur $]0,+\infty[$, l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants suivante :

$$(E) \qquad x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \qquad x \in]0,+\infty[.$$

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et soit z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(e^t)$. Montrer que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Réciproquement, soit z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit y la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $y(x) = z(\ln x)$. Montrer que y est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que $y(x)$ est solution de (E) **si, et seulement si** $z(t) = y(e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E'), une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants que l'on déterminera.
4. En déduire les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3. Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z vérifiant

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \ [2^n]. \tag{1}$$

1. Dans cette question on suppose que $n = 2$. Montrer que l'équation (1) admet une solution $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.
2. Dans cette question on suppose que $n = 3$.
   a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $r(m)$ le reste de la division euclidienne de m^2 par 8. Déterminer les éléments de l'ensemble
   $$\{r(m) \ / \ m \in \mathbb{N}\}.$$
   b) En déduire que l'équation (1) n'admet pas de solution $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.
3. Dans cette question on suppose que $n \geq 4$.
   a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tel que x et y sont pairs et z est impair. Calculer le reste de la division euclidienne de $x^2 + y^2 + z^2$ par 4 et en déduire que (x, y, z) n'est pas solution de (1).
   b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tel que x, y et z sont impairs. Calculer le reste de la division euclidienne de $x^2 + y^2 + z^2$ par 8 et en déduire que (x, y, z) n'est pas solution de (1).
   c) En déduire que l'équation (1) n'admet pas de solution $(x, y, z) \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que n divise l'entier $\underbrace{999...999}_{k \text{ chiffres } 9}$, alors $\text{PGCD}(n, 10) = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n l'application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ définie pour tout entier naturel k par :
   $f_n(k)$ est le reste de la division euclidienne de 10^k par n.
   a) Montrer que f_n n'est pas injective.
   b) On suppose que $\text{PGCD}(n, 10) = 1$. Soit a et b deux entiers naturels avec $a \leq b$ tels que :
   $$f_n(a) = f_n(b).$$
   Montrer que n divise $10^{b-a} - 1$.
   c) Montrer que si $\text{PGCD}(n, 10) = 1$, alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que n divise l'entier $\underbrace{999...999}_{k \text{ chiffres } 9}$.
3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $\text{PGCD}(m, 10) = 1$, alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que m divise l'entier $\underbrace{111...111}_{k \text{ chiffres } 1}$.