**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre d'automne 2026-2027

Cursus prépa 2A : Mathématiques 3

---

**Correction du devoir commun n° 1**

---

**Correction de l'exercice 1.**

**1.** La fonction $f$ est continue sur $]0,\pi/2[$ et sur $]\pi/2,+\infty[$. Concernant $\pi/2$, on a :

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-\pi/2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to(\pi/2)^+} f(x).$$

Ainsi, $f$ est continue sur $]0,+\infty[$.

**2.** La fonction $f$ est positive et continue sur $]0,+\infty[$. Il suffit donc d'étudier l'intégrabilité au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Étude au voisinage de 0 : puisque $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $\lim_{x\to 0} e^{-x} = 1$, on a

$$f(x) = \frac{x}{(\sin x)^{3/2}}e^{-x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Or $x \mapsto x^{-1/2}$ est intégrable au voisinage de 0 (critère de Riemann avec $1/2 < 1$). Par les théorèmes de comparaison, on obtient que $f$ est intégrable au voisinage de 0.

Étude au voisinage de $+\infty$ : pour $x > \pi/2$, on a $f(x) = xe^{-x}$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} f(x)x^2 = 0$ par croissances comparées. On en déduit que $f(x) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{x^2})$. Par Riemann et par les théorèmes de comparaison, on obtient que $f$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Conclusion : $f$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

**Correction de l'exercice 2.**

On a les DL suivants en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} + o(t^3).$$

En posant $t = 2x + 2x^2$ et en utilisant le DL de $\sqrt{1+t}$ on obtient,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2x+2x^2} &= 1 + x + x^2 - \frac{1}{8}\big(4x^2 + 8x^3\big) + \frac{1}{16}(8x^3) + o(x^3)\\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$e^x - \sqrt{1+2x+2x^2} = \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \qquad \sin(x) - x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

D'où les équivalents suivants :

$$e^x - \sqrt{1+2x+2x^2} \sim \frac{2}{3}x^3, \qquad \sin(x) - x \sim -\frac{1}{6}x^3.$$

On en déduit que

$$\frac{e^x - \sqrt{1+2x+2x^2}}{\sin(x) - x} \sim (\frac{2}{3}x^3)/(-\frac{1}{6}x^3) \sim -4 \quad \text{puis que} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x+2x^2}}{\sin x - x} = -4.$$

**Correction de l'exercice 3.**

Posons $g(x) = \sqrt{x^2+2x+2} - x - 1$ pour $x \geq 0$. La fonction $g$ est continue sur $[0, +\infty[$ ; il n'y a donc pas de problème d'intégrabilité en 0. De plus,

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$

donc $g(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$. Cherchons un équivalent de $g$ en $+\infty$.

Variante 1 : factorisation par $x^2$ sous la racine et DL.

Pour $x > 0$, on a

$$g(x) = x\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} - x - 1.$$

On utilise le DL : $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$. En prenant $t = 2/x + 2/x^2$ et $x \to +\infty$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$g(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - x - 1 = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{donc} \qquad g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Variante 2 : multiplication et division par l'expression conjuguée.

Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2} - x - 1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2} + x + 1\right)}{\sqrt{x^2+2x+2} + x + 1} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 2 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+2} + x + 1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2} + x + 1}.\end{aligned}$$

On a alors :

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+2} + x + 1}{x} = \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2,$$

et on retrouve $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

Conclusion. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x}$ diverge par Riemann et par les théorèmes de comparaison.

**Correction de l'exercice 4.**

**1.** Notons $C_1, C_2, C_3$ les colonnes de $A$. On remarque que $C_3 = 2C_1 + C_2$. De plus, $C_1$ et $C_2$ sont linéairement indépendantes. On déduit que $C_1$ et $C_2$ forment une base de $\mathrm{Im}(A)$. Par ce qui précède, $\mathrm{rang}(A) = 2$ donc par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(A) = 1$. Il suffit donc de trouver un vecteur non nul dans ce noyau pour en obtenir une base. La relation $C_3 = 2C_1 + C_2$ peut aussi s'écrire $2C_1 + 1C_2 - 1C_3 = 0$ ce qui implique que le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}\, A$. Ainsi $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

**2.** La question 1 permet directement d'obtenir :

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\{-e_1 + 3e_2 + 2e_3,\ 3e_1 - 4e_2 - 6e_3\} \text{ et } \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\{2e_1 + e_2 - e_3\}.$$

**Correction de l'exercice 5.**

**1.** L'espace $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ est naturellement isomorphe à $\mathbb{R}^5$. Par conséquent, $\dim(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3) = 5$.

**2.** Soient $(f_1, \dots, f_n)$ une base de $F$ et $(g_1, \dots, g_m)$ une base de $G$. Montrons que

$$\mathcal{B} = \big((f_1, 0), \dots, (f_n, 0), (0, g_1), \dots, (0, g_m)\big)$$

est une base de $F \times G$.
Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice. Soit $(x, y) \in F \times G$. On peut écrire $x = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ et $y = \sum_{j=1}^m y_j g_j$ avec $x_i, y_j \in \mathbb{R}$, d'où

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i (f_i, 0) + \sum_{j=1}^{m} y_j (0, g_j).$$

Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i (f_i, 0) + \sum_{j=1}^{m} y_j (0, g_j) = (0, 0).$$

Notons $x = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ et $y = \sum_{j=1}^m y_j g_j$. L'égalité précédente devient alors $(x, y) = (0, 0)$ ce qui implique $x = 0$ et $y = 0$. La liberté des $f_i$ dans $F$ entraîne alors : pour tout $i$, $x_i = 0$. La liberté des $g_i$ dans $G$ entraîne la nullité des $y_i$. La famille $\mathcal{B}$ est bien libre.

**3.** Pour $(x, y), (x', y') \in F \times G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} u\big(\lambda(x, y) + (x', y')\big) &= u(\lambda x + x', \lambda y + y') = \lambda x + x' + \lambda y + y' \\ &= \lambda(x + y) + (x' + y') = \lambda u(x, y) + u(x', y'). \end{aligned}$$

Ainsi, $u$ est linéaire. Par définition de la somme de deux sous-espaces,

$$\mathrm{Im}(u) = \{x + y \mid x \in F,\ y \in G\} = F + G.$$

**4.** Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}(u)$. Alors $u(x, y) = x + y = 0$ donc $y = -x$ et $x \in F \cap G$. Réciproquement, soit $x \in F \cap G$. Alors $u(x, -x) = x + (-x) = 0$ donc $(x, -x) \in \mathrm{Ker}(u)$. On a bien l'égalité $\mathrm{Ker}(u) = \{(x, -x) | x \in F \cap G\}$.
L'application $\varphi : F \cap G \longrightarrow \mathrm{Ker}(u)$ définie par $\varphi(x) = (x, -x)$ est bien définie (c-à-d on est bien à valeurs dans $\mathrm{Ker}(u)$ par l'égalité précédente). De plus, elle est linéaire (je ne détaille pas). Elle est injective, car $\varphi(x) = (0, 0)$ entraîne $x = 0$, et elle est surjective par l'égalité précédente. D'où l'isomorphisme demandé.

**5.** Le théorème du rang, appliqué à $u$, donne $\dim(F \times G) = \dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Im}(u)$. Les questions précédentes impliquent alors

$$\dim F + \dim G = \dim F \cap G + \dim(F + G).$$