Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2026-2027

Cursus prépa 2A : Mathématiques 3 28 septembre 2026

Devoir commun n° 1

La rédaction mathématique et la présentation de votre copie seront prises en compte dans la notation.

Partie analyse

Exercice 1. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(\sin(x))^{3/2}}\, e^{-x} & \text{si } x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ x\, e^{-x} & \text{si } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f.
2. f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 2. Déterminer

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \sqrt{1 + 2x + 2x^2}}{\sin(x) - x} \quad \text{(indication : faire un DL à l'ordre 3).}$$

Exercice 3. L'intégrale suivante est-elle convergente ?

$$\int_0^{+\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x - 1) dx.$$

Partie algèbre

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit u l'endomorphisme de E tel que

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$.
2. En déduire $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 5.

1. Que vaut $\dim(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3)$? Cette question ne demande pas une justification détaillée.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Notons $n = \dim F$ et $m = \dim G$. Que vaut $\dim(F \times G)$? Le démontrer en utilisant une base de F et une base de G bien choisies.
3. Soit
$$u : F \times G \longrightarrow E$$
$$(x, y) \longmapsto x + y.$$
Montrer que u est linéaire et déterminer $\mathrm{Im}(u)$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \{(x, -x) \mid x \in F \cap G\}$. En déduire que $F \cap G$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont isomorphes.
5. À l'aide des questions précédentes, retrouver la formule de Grassmann.