
Devoir commun n° 2

La rédaction mathématique et la présentation de votre copie seront prises en compte dans la notation.

PARTIE ALGÈBRE

Exercice 1. Étant donnés $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de la matrice suivante de $M_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x_2 \\ x_1 & \cdots & \cdots & x_1 \end{pmatrix}.$$

On demande le résultat sous forme factorisée.

Exercice 2. On rappelle le théorème de Bézout : si a et b sont deux entiers premiers entre eux alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$.

1. Montrer que les déterminants de A et de B sont dans $\mathbb{Z}$.
2. Rappeler la formule reliant une matrice inversible M , sa comatrice et son déterminant.
3. On suppose que A et B sont inversibles et que $\text{pgcd}(\det(A), \det(B)) = 1$. Montrer qu'il existe $U, V \in M_n(\mathbb{Z})$ telles que $AU + BV = I_n$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 ou 4. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -\text{Id}_E$. Pour un vecteur $x \in E$, on note $F(x) = \text{Vect}\{x, f(x)\}$.

1. En utilisant le déterminant, montrer que la dimension de E est 4.
2. Montrer que pour tout $x \in E$, $F(x)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f et que $F(x)$ est de dimension 2 si $x \neq 0$.
3. Soit $a \in E \setminus \{0\}$. Justifier qu'il existe $b \in E$ tel que $b \notin F(a)$. Montrer que $E = F(a) \oplus F(b)$.
4. En déduire que la famille $\mathcal{B} = (a, f(a), b, f(b))$ est une base de E .
5. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4.

1. Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes positifs ou nuls.
 - (a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $a_n \leq 1$.
 - (b) En déduire la nature de la série $\sum a_n^3$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que la somme suivante existe et la calculer : $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{inx}}{2^n}$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$. En cas de convergence, on précisera si la convergence est absolue et en cas de divergence, on précisera si elle est grossière.
4. Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Lorsqu'elle existe, la limite de (u_{n+1}/u_n) est-elle forcément strictement inférieure à 1 ?

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \min\{n, \frac{1}{\sqrt{x}}\}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers une fonction qu'on déterminera.
2. Cette convergence est-elle uniforme ?
3. Soit $a > 0$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$.