

Exercice 1

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ & x_1 & x_2 & \dots & \\ & & x_1 & \dots & \\ & & & \ddots & \\ x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_3 & \dots & x_n \\ 0 & x_1 - x_2 & \dots & \\ & 0 & \ddots & \\ & & 0 & x_2 \end{vmatrix} \text{ avec } \begin{aligned} C_1 &\leftarrow C_1 - C_2 \\ C_2 &\leftarrow C_2 - C_3 \\ &\vdots \\ C_{n-1} &\leftarrow C_{n-1} - C_n \end{aligned}$$
$$= x_1 (x_1 - x_2)^{n-1}$$

Exercice 2

1) On le fait seulement pour A : $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^n \epsilon(\sigma) a_{i, \sigma(i)}$
où $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Ainsi $\det(A)$ est une somme de produits d'entiers

2) $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot {}^t(\text{com } M)$

3) Par Bézout et par hypothèse $\exists a, b \in \mathbb{Z}$ t.q. $a \det(A) + b \det(B) = 1$.

D'où $a \det(A) \cdot I_n + b \det(B) \cdot I_n = I_n$.

Par 2) $\det(A) \cdot I_n = A \cdot {}^t(\text{com } A)$ et $\det(B) I_n = B \cdot {}^t(\text{com } B)$

On pose $U = a \cdot {}^t(\text{com } A)$ et $V = b \cdot ({}^t \text{com } B)$ ce qui donne :

$$AU + BV = a \det(A) I_n + b \det(B) I_n = I_n$$

La matrice $\text{com}(A)$ est constituée de mineurs issus de A donc par 1), $\text{com}(A) \in M_n(\mathbb{Z})$ et donc U également. De même, $V \in M_n(\mathbb{Z})$

Exercice 3

1) Si on note $n = \dim E$ alors $\det(f^2) = \det(-Id)$ d'où
 $(\det(f))^2 = (-1)^n$. Or $\det(f) \in \mathbb{R}$ donc $(\det(f))^2 \geq 0$ donc
 n doit être pair. On a donc $n = 4$

2) Soit $x \in E$. Si $x = 0$ alors $F(x) = \{0\}$ est stable par tout endomorphisme
On suppose $x \neq 0$. On a $f(x) \in F(x)$ et $f(f(x)) = f^2(x) = -x \in F(x)$

Ainsi $f(\{x, f(x)\}) \subseteq F(x)$. Par conséquent, par linéarité, $f(F(x)) \subseteq F(x)$. Montrons que $(x, f(x))$ est libre.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.q. $\lambda x + \mu f(x) = 0$. On applique f :

$$\lambda f(x) - \mu x = 0.$$

On multiplie la première égalité par λ et on reporte:

$$\lambda^2 x + \mu \lambda f(x) = 0$$

$$\lambda^2 x + \mu^2 x = 0 \quad \text{ie} \quad (\lambda^2 + \mu^2) x = 0. \quad \text{Or } x \neq 0 \text{ donc } \lambda^2 + \mu^2 = 0$$

donc $\lambda = \mu = 0$. La famille $(x, f(x))$ est libre dans E et génératrice de $F(x)$, c'est donc une base de $F(x)$ qui est donc de dimension 2

3) L'inclusion $F(a) \subset E$ est stricte car $\dim E = 4 > \dim F(a) = 2$ donc $\exists b \in E$ t.q. $b \notin F(a)$ et b est non-nul (sinon il serait dans $F(a)$).

Montrons que $F(a) \cap F(b) = \{0\}$

Soit $z \in F(a) \cap F(b)$. $\exists \alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ t.q.

$$z = \alpha a + \beta f(a) = \alpha' b + \beta' f(b). \quad (1)$$

On applique f : $-\beta a + \alpha f(a) = -\beta' b + \alpha' f(b) \quad (2)$

On multiplie (2) par β' et (1) par α' et on retranche (2) à (1)

$$(\alpha \alpha' + \beta \beta') a + (\beta \alpha' - \alpha \beta') f(a) = (\alpha'^2 + \beta'^2) b$$

Si $\alpha'^2 + \beta'^2 \neq 0$ alors $b \in \text{Vect}\{a, f(a)\} = F(a)$ ce qui est absurde. Par conséquent $\alpha'^2 + \beta'^2 = 0$ d'où $\alpha' = \beta' = 0$

d'où $z = 0$. On a bien $F(a) \cap F(b) = \{0\}$

De plus $\dim F(a) \oplus F(b) = 4$ donc $E = F(a) \oplus F(b)$

4) On a $E = F(a) \oplus F(b)$ et $(a, f(a))$ est une base de $F(a)$ et $(b, f(b))$ est une base de $F(b)$. La concaténation $(a, f(a), b, f(b))$ est donc une base de E

$$\text{5)} \quad \begin{matrix} f(a) & f(f(a)) & f(b) & f(f(b)) \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} a \\ f(a) \\ b \\ f(b) \end{matrix} \end{matrix} = M_B(f)$$

Exercice 4

1) (a) $\sum a_n$ converge donc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Donc (avec $\varepsilon = 1$) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq n_0,$

$$|a_n - 0| \leq 1 \quad \text{ie} \quad -1 \leq a_n \leq 1$$

les a_n étant ≥ 0 , on a : $\forall n \geq n_0, 0 \leq a_n \leq 1$

(b) Pour $n \geq n_0, 0 \leq a_n \leq 1$ donc $a_n^2 \leq a_n \leq 1$ et
 $0 \leq a_n^3 \leq a_n$

Ainsi la série $\sum a_n^3$ est croissante car à termes ≥ 0
et majorée par $\sum a_n$, elle est donc convergente

2) On a une série géométrique de raison $\lambda = -\frac{e^{ix}}{2}$
et $|\lambda| = \frac{1}{2} < 1$. La série est donc convergente.

$$\text{On a : } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{inx}}{2^n} = \frac{1}{1 + \frac{e^{ix}}{2}}$$

3) Vra un DL en 0 :

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{d'où}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le CSSA

et $\sum o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge par les théorèmes de comparaison et
par Riemann car $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ et $3/2 > 1$.

Ainsi la série est convergente. Voyons la convergence absolue.

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \cos\left(\frac{1}{n}\right) \text{ pour } n \geq 1 \quad \text{car pour } n \geq 1, \frac{1}{n} \in]0, \pi/2[$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

$\sum o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converge (vu précédemment) mais $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{1/2}}$
diverge par Riemann donc la série converge mais pas
absolument.

4) Non en prenant $u_n = \frac{1}{n^2}$. On a bien $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par Riemann

Exercice 5 $f_n(x) = \min(n, \frac{1}{\sqrt{x}})$ pour $x > 0$

1) Soit $x \in]0, +\infty[$.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $n_0 \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Alors $\forall n \geq n_0, n \geq \frac{1}{\sqrt{x}}$

donc $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(f_n) converge simplement vers la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} \leq x \quad (\text{la fonction carrée est croissante sur }]0, +\infty[)$$

$$\text{Ainsi } f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq \frac{1}{n^2} \\ n & \text{si } x \leq \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} - n & \text{si } x \leq \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in]0, \frac{1}{n^2}[} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - n \right) = +\infty$$

donc la convergence n'est pas uniforme.

3) La suite $(\frac{1}{n^2})$ tend vers 0 donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0, \frac{1}{n^2} < a$

Pour $n \geq n_0$ et pour $x \geq a$, on a $x > \frac{1}{n^2}$ d'où $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\text{donc pour } n \geq n_0 : \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

Ainsi $\|f_n - f\|_{\infty, [a, +\infty[}$ est fini et tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$ d'où la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.