Devoir commun n° 4

La rédaction mathématique et la présentation de votre copie seront prises en compte dans la notation. Les quatre exercices sont à rédiger sur quatre copies doubles séparées.

Exercice 1.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\text{(a)} \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n \quad ; \quad \text{(b)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{3n+2} \quad ; \quad \text{(c)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \sin(n) z^n$$

2. En admettant que le rayon de convergence de la série entière suivante est 1, calculer la somme de la série pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}.$$

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -16 & 8 \\ 1 & -11 & 6 \\ 2 & -16 & 9 \end{pmatrix}$$

On admet que le polynôme caractéristique de f est $\chi_f = (X+3)(X-1)^2$.

1. Montrer que f n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D + N$ avec D une matrice diagonale et N une matrice nilpotente triangulaire vérifiant $ND = DN$.
3. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$. Déterminer une expression de A^5 en fonction de P, N et D.

Exercice 3. Soit (E) l'équation différentielle :

$$xy''(x) + (2-x)y'(x) - y(x) = 3.$$

1. On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la fonction somme S est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par les coefficients a_n pour $n \geq 1$.
   (b) En déduire une expression explicite de a_n pour $n \in \mathbb{N}$ en fonction de n et a_0.
2. On pose désormais les coefficients a_n comme étant ceux trouvés ci-dessus. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
3. Déterminer l'ensemble des séries entières dont la fonction somme est solution de (E), et exprimer leurs sommes à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On considère la matrice suivante dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer le polynôme minimal de A.
3. Calculer la trace de A et en déduire le polynôme caractéristique de A.
4. Justifier que la matrice A est inversible, et exprimer A^{-1} comme combinaison linéaire de A et I_3.
5. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 de $B = A + A^{-1}$.
6. BONUS : Montrer que si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1, alors X est vecteur propre de A^{-1} et en déduire la multiplicité algébrique de -2 en tant que valeur propre de B.

Correction du Devoir Surveillé commun 4

Exercice 1

1. (a) Pour tout $n \geqslant 0$, soit $a_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$. Comme $a_n \neq 0$ pour tout n, on peut utiliser la règle de D'Alembert pour les séries entières. On a :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(3n+3)!}{(n+3)!^3} \cdot \frac{n!^3}{(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{((n+3)(n+2)(n+1))^3} \sim \frac{27n^3}{n^3} = 27.$$

On a donc $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 27$ et le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est ainsi $R = \frac{1}{27}$.

(b) Soit $z \in \mathbf{C}^*$. Pour tout $n \geqslant 1$, posons $a_n = \frac{\ln n}{n^2} z^{3n+2}$. On a $a_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant 2$ et

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}|z|^{3n+5} \cdot \frac{n^2}{\ln n} \frac{1}{|z|^{3n+2}} = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot |z|^3.$$

Or, on a $\ln(n+1) \sim \ln n$ car $\ln(n+1) = \ln n + \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln n + o(1) = \ln n + o(\ln n)$. Ainsi,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \sim |z|^3 \to |z|^3.$$

Ainsi, d'après la règle de D'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum a_n$ est absolument convergente (donc convergente) si $|z|^3 < 1$, c'est-à-dire $|z| < 1$. Ainsi le rayon de convergence R de la série entière proposée vérifie $R \geqslant 1$. Par ailleurs, toujours par la règle de D'Alembert, la série $\sum a_n$ est grossièrement divergente si $|z|^3 > 1$, c'est-à-dire $|z| > 1$, et donc $R \leqslant 1$. On a donc $R = 1$.

(c) Soit $r \geqslant 0$. Si $r \leqslant 1$, on a $|\sin(n) r^n| \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Cela montre que la suite $(\sin(n) r^n)_{n \geqslant 0}$ est bornée pour tout $r \leqslant 1$, et donc que le rayon de convergence R de $\sum \sin(n) z^n$ vérifie $R \geqslant 1$. Par ailleurs, on a $\sin(n) \cdot 1^n = \sin n \not\to 0$ quand $n \to +\infty$, ce qui montre que $R \leqslant 1$. Finalement, cela montre que $R = 1$.

Remarque : pour démontrer que $\sin n \not\to 0$, on peut procéder de la manière suivante. Puisque $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2\cos(n)\sin 1$, si on avait $\sin n \to 0$, on aurait aussi $\cos n \to 0$. On aurait ensuite $1 = \cos^2 n + \sin^2 n \to 0$, ce qui est absurde.

2. Soit $x \in]-1, 1[$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = -x \sum_{n=0}^{+\infty} n(-x^2)^n = -x \sum_{n=0}^{+\infty} nX^n,$$

avec $X = -x^2$. Or,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nX^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nX^n = X \sum_{n=1}^{+\infty} nX^{n-1}.$$

La somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nX^{n-1}$ est la somme en X de la série dérivée de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} z^n$, dont la somme vaut $\dfrac{1}{1-z}$ pour tout $|z| < 1$. Pour de tels z, on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Puisque $X = -x^2 \in]-1,1[$, on peut remplacer z par $X = -x^2$, et on obtient finalement

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n+1} &= -x \cdot (-x^2) \cdot \frac{1}{(1-(-x^2))^2} \\ &= \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Déterminons le polynôme minimale de f, que l'on note π_f. Nous savons que $\pi_f = \pi_A$, et par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, ainsi π_A divise le polynôme χ_A. De plus, toute valeur propre de A est racine de π_A, et $\mathrm{Sp}(A) = \{-3, 1\}$, donc $\pi_A = (X+3)(X-1)$ ou $\pi_A = (X+3)(X-1)^2$.
   Cependant, $(A+3I_3)\cdot(A-I_3) = \begin{pmatrix} 4 & -16 & 8 \\ 1 & -8 & 6 \\ 2 & -16 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -16 & 8 \\ 1 & -12 & 6 \\ 2 & -16 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -16 & 8 \\ 8 & -32 & 16 \end{pmatrix} \neq 0$ Donc le polynôme $(X+3)(X-1)$ n'annule pas la matrice A, de ce fait $\pi_A = (X+3)(X-1)^2$. Le polynôme minimal n'est pas à racine simple, donc A n'est pas diagonalisable.

2. Pour déterminer la base $\mathcal{B}$ souhaitez, nous commençons par calculer les espaces propres de A, puis nous en déduisons ceux de f. Soit $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} v \in E_{-3}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad Av + 3v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4a - 16b + 8c \\ a - 8b + 6c \\ 2a - 16b + 12c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a - 4b + 2c = 0 \\ a - 8b + 6c = 0 \\ a - 8b + 6c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c = b \\ a = 2b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad v \in \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

   Notons $v_1 = (2,1,1)$. On montre de même que $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, notons $v_2 = (0,1,2)$. Nous avons obtenu les deux premiers éléments de $\mathcal{B}$, les triplets v_1 et v_2. Nous cherchons maintenant à compléter cette base par un vecteur de $\mathrm{Ker}\big((f - \mathrm{id})^2\big)$ car la dimension de $E_1(A)$ n'est pas égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre 1.

$$\begin{aligned} v \in \mathrm{Ker}\big((A - I_3)^2\big) \quad &\Leftrightarrow \quad (A - I_3)^2 \cdot v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 64 & -32 \\ 0 & 32 & -16 \\ 0 & 32 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 64b - 32c = 0 \\ 32b - 16c = 0 \\ 32b - 16c = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c = 2b \\ &\Leftrightarrow \quad v \in \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Nous pouvons donc prendre $v_3 = (1, 0, 0)$. Nous avons $f(v_3) = v_2 + v_3$, la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est donc $T = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
De plus nous avons bien $ND = DN$, à vérifier par le calcul ou en justifiant car elles sont diagonales par blocs. La matrice de passage P vérifiant $P^{-1}AP = T$ est ici $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Nous savons que $A = P \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \cdot P^{-1} = P(N+D)P^{-1}$, donc par récurrence, $A^5 = P(N+D)^5P^{-1}$. De plus, $ND = DN$, donc d'après le binôme de Newton :

$$(N + D)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} N^k D^{5-k} = D^5 + 5ND^4$$

La somme précédente s'arrêtant au terme $k = 2$ car $N^2 = 0$. Ainsi, $A^5 = P(D^5 + 5ND^4)P^{-1}$.

Exercice 3

1. (a) Comme $R > 0$, la fonction somme S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R; R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Ainsi, pour tout $x \in]-R; R[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-R; R[$,

$$\begin{aligned}
& xS''(x) + (2 - x)S'(x) - S(x) \\
= \ & x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (2 - x) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
= \ & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
= \ & \sum_{p=1}^{+\infty} (p+1)p a_{p+1} x^p + 2 \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) a_{p+1} x^p - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
& \text{par le changement d'indice } p = n - 1 \\
= \ & \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)n a_{n+1} + 2(n+1)a_{n+1} - n a_n - a_n \right) x^n + 2a_1 - a_0 \\
= \ & \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \left((n+2)a_{n+1} - a_n \right) x^n + 2a_1 - a_0
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& S \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-R; R[\\
\iff \ & \forall x \in]-R; R[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) \left((n+2)a_{n+1} - a_n \right) x^n + 2a_1 - a_0 = 3 \\
\iff \ & \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)\left((n+2)a_{n+1} - a_n \right) = 0 \\ 2a_1 - a_0 = 3 \end{cases} \quad \text{par unicité du développement en série entière} \\
\iff \ & \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+2} \\ a_1 = \dfrac{a_0 + 3}{2} \end{cases} \qquad (*)
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{H}_n$ l'assertion "$a_n = \dfrac{a_0+3}{(n+1)!}$". Puisque $a_1 = \dfrac{a_0+3}{2}$, l'assertion $\mathcal{H}_1$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que l'assertion $\mathcal{H}_n$ est vérifiée, alors par la relation de récurrence,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+2} = \frac{a_0+3}{(n+2)(n+1)!} = \frac{a_0+3}{(n+2)!}$$

ce qui démontre que $\mathcal{H}_n$ est aussi vérifiée. Par le principe de récurrence, on en conclut que $a_n = \dfrac{a_0+3}{(n+1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (et $a_0 = a_0$).

2. On pose $a_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{a_0+3}{(n+1)!}$. Si $a_0 = -3$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$ donc le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut $R = +\infty$ (en effet, pour tout $r \in \mathbb{R}^+$, la suite $(a_n r^n)_n$ converge vers 0). Si $a_0 \neq -3$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \neq 0$ et

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a_0+3|}{(n+2)!}\frac{(n+1)!}{|a_0+3|} = \frac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par la règle de d'Alembert (pour les séries entières), le rayon de convergence R recherché vaut aussi $+\infty$.

3. On a vu que si $\sum a_n x^n$ est une série entière dont la fonction somme est solution de (E), alors les coefficients vérifient $a_0 \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{a_0+3}{(n+1)!}$. Réciproquement, pour une telle suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le rayon de convergence de la série entière associée vaut $R = +\infty$ qui est bien strictement positif, et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{a_0+3}{(n+2)!} = \frac{a_n}{n+2} \qquad \text{avec} \qquad a_1 = \frac{a_0+3}{2}$$

donc la suite $(a_n)_n$ satisfait la condition $(*)$. On peut donc remonter les équivalences obtenues à la question 1a pour obtenir que la fonction somme S de cette série entière est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'ensemble des séries entières dont la fonction somme est solution de (E) est

$$\left\{ a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_0+3}{(n+1)!} x^n \mid a_0 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} S(x) &= a_0 + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_0+3}{(n+1)!} x^{n+1} \\ &= a_0 + \frac{a_0+3}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= a_0 + \frac{a_0+3}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x\right) \\ &= a_0 + \frac{a_0+3}{x}(e^x - 1 - x) \end{aligned}$$

Enfin

$$S(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_0+3}{(n+1)!} 0^n = a_0.$$

Exercice 4.

1. Via un simple produit, on obtient $A^2 = A + 2I_3$. Par conséquent, le polynôme $X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$ est annulateur de A. Ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ donc A est diagonalisable.

2. Le polynôme minimal π_A de A divise le polynôme obtenu à la question précédente. Donc $\pi_A \in \{X+1,\ X-2,\ (X+1)(X-2)\}$. Si $\pi_A = X+1$ alors $A+I_3 = 0$ i.e. $A = -I_3$ ce qui est absurde. De la même façon, $\pi_A = X-2$ implique $A = 2I_3$ ce qui est faux. Par conséquent, $\pi_A = (X+1)(X-2)$.

3. Le polynôme caractéristique χ_A a les mêmes racines que π_A donc $\chi_A = (X+1)^2(X-2)$ ou bien $\chi_A = (X+1)(X-2)^2$. Si on était dans le deuxième cas, on obtiendrait $\mathrm{tr}(A) = -1+2+2 = 3$ or la trace de A est égale à $\mathrm{tr}(A) = 0+0+0 = 0$. Donc $\chi_A = (X+1)^2(X-2)$.

4. Par la question 1, on a : $A(A-I_3) = A^2 - A = 2I_3$ ou encore $A \cdot \frac{1}{2}(A - I_3) = I_3$. Cette égalité implique $\det(A)\cdot\det(\frac{1}{2}(A-I_3)) = \det(I_3) = 1$ ce qui entraîne $\det(A) \neq 0$ d'où l'inversibilité de A d'une part et d'autre part, $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$.

5. Pour commencer, on a : $B = A + A^{-1} = A + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I_3 = \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}I_3$. On a alors

$$\begin{aligned}
B^2 &= \Big(\frac{3}{2}A - \frac{1}{2}I_3\Big)^2 \\
&= \frac{9}{4}A^2 - 2\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}A + \frac{1}{4}I_3 \quad (A \text{ et } I_3 \text{ commutent}) \\
&= \frac{9}{4}(A+2I_3) - \frac{3}{2}A + \frac{1}{4}I_3 \quad (\text{par la question 1}) \\
&= \frac{3}{4}A + \frac{19}{4}I_3 \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2}A - \frac{1}{2}I_3 + \frac{1}{2}I_3\Big) + \frac{19}{4}I_3 \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2}A - \frac{1}{2}I_3\Big) + 5I_3 \\
&= \frac{1}{2}B + 5I_3.
\end{aligned}$$

   Par conséquent, le polynôme $X^2 - \frac{1}{2}X - 5$ est annulateur de B.

6. Remarquons que $X^2 - \frac{1}{2}X - 5 = (X+2)(X-\frac{5}{2})$. L'égalité $B = \frac{3}{2}A - \frac{1}{2}I_3$ montre que B n'est pas diagonale. Donc le polynôme minimal de B ne peut pas être de degré 1 et donc $\pi_B = (X+2)(X-\frac{5}{2})$. Ainsi $\chi_B = (X+2)^2(X-\frac{5}{2})$ ou bien $\chi_B = (X+2)(X-\frac{5}{2})^2$.
   Montrons que la multiplicité géométrique de -2 en tant que valeur propre de B est au moins 2. Cela montrera que la multiplicité algébrique aussi et donc cette dernière sera égale à 2 ce qui signifiera que $\chi_B = (X+2)^2(X-\frac{5}{2})$.
   Soit $X \in M_{3\times1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A pour la valeur propre -1. On a alors $AX = -X$. On multiplie par A^{-1} et on obtient $X = -A^{-1}X$ i.e. $A^{-1}X = -X$. Par conséquent $BX = (A + A^{-1})X = AX + A^{-1}X = -X - X = -2X$. Ainsi, X est un vecteur propre de B pour la valeur propre -2. On a donc l'inclusion $E_{-1}(A) \subseteq E_{-2}(B)$. Or la dimension de $E_{-1}(A)$ est 2 donc celle de $E_{-2}(B)$ est au moins égale à 2.