Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2025-2026

Cursus préparatoire — Algèbre 3, analyse 3 29 septembre 2025

Devoir surveillé n° 1

Durée : 1 h 30

ATTENTION ! LA RÉDACTION MATHÉMATIQUE ET LA PRÉSENTATION DE VOTRE COPIE SERONT PRISES EN COMPTE DANS LA NOTATION.

Exercice 1

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est divergente.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-x}\dfrac{\operatorname{Arctan} x - \sin x}{\sqrt{1+x^2}-\cos x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
3. Soit $a>0$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Exercice 2

Soient a, b deux réels avec $a \neq 0$ et $f :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^a)}{x^b}$ pour tout $x>0$. On cherche à déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur a et b pour que f soit intégrable sur $]0,+\infty[$.

1. Dans le cas $a>0$, montrer que f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $1<b<1+a$.
2. Traiter le cas $a<0$ à l'aide du changement de variable $y=\dfrac{1}{x}$.

Exercice 3

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \mid x+y-2z-t=0 \text{ et } x-y-t=0\right\} \text{ et } G = \operatorname{Vect}(u,v),$$

avec $u=(0,1,1,0)$ et $v=(-1,4,0,1)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 4

Soit u l'application définie sur $\mathbf{R}_2[X]$ par $u(P)=(1-X^2)P'+2XP$ pour tout $P\in\mathbf{R}_2[X]$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Soient $P_1=(X+1)^2$, $P_2=X^2-1$ et $P_3=(X-1)^2$. Montrer que $\mathscr{B}=(P_1,P_2,P_3)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.
3. Donner la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$.
4. Donner une base de $\operatorname{Im} u$ et une base de $\ker u$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel sur un corps K et soient u, v deux endomorphismes de E. Montrer que

$$E = \operatorname{Im} u + \ker v \iff \operatorname{Im}(v\circ u) = \operatorname{Im} v.$$