Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2025-2026

Cursus préparatoire — Algèbre 3, analyse 3 — 29 septembre 2025

Devoir surveillé n° 1 – corrigé
Durée : 1 h 30

Exercice 1

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2}$ pour tout $x \in]0,1]$. Elle est bien continue sur $]0,1]$. On peut aussi noter que pour tout $x \in]0,1]$, on a $x < 2x$, ce qui entraîne que $e^{-x} > e^{-2x}$ et donc $g(x) > 0$. La fonction g étant donc à valeurs positives, montrer que $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente revient à montrer que g n'est pas intégrable sur $]0,1]$.

Or, au voisinage de 0, on a $e^{-x} - e^{-2x} = 1 - x - (1-2x) + o(x) = x + o(x) \sim x$, d'où $g(x) \sim \dfrac{1}{x}$. Comme $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ d'après la règle de Riemann, g ne l'est pas non plus : c'est ce qu'il fallait démontrer.

2. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ car c'est un produit et quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas pour $x > 0$. Par conséquent, f est intégrable sur tout segment $[a,b]$ avec $0 < a < b$.

• Étudions l'intégrabilité de f sur $]0,1]$. Au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan} x - \sin x &= x - \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\\ &= -\frac{x^3}{6} + o(x^3)\\ &\sim -\frac{x^3}{6}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2} - \cos x &= 1 + \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\\ &= x^2 + o(x^2)\\ &\sim x^2.\end{aligned}$$

Ainsi, on a $f(x) \sim -\frac{x}{6}$ et donc $f(x) \to 0$ quand $x \to 0$: la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et est donc intégrable sur $]0,1]$.

• Étudions maintenant l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$. On va majorer $|f(x)|$ pour $x \geqslant 1$, en remarquant d'abord que

$$|\operatorname{Arctan} x - \sin x| \leqslant |\operatorname{Arctan} x| + |\sin x| \leqslant \frac{\pi}{2} + 1.$$

Ensuite, toujours pour $x \geqslant 1$, on a $\sqrt{1+x^2} \geqslant \sqrt{2}$ et comme $-\cos x \geqslant -1$, on obtient $\sqrt{1+x^2} - \cos x \geqslant \sqrt{2} - 1$. En particulier, cela montre que le membre de gauche de cette dernière inégalité est positif, de sorte que

$$|f(x)| \leqslant e^{-x} \frac{|\operatorname{Arctan} x - \sin x|}{\sqrt{1+x^2} - \cos x} \leqslant e^{-x} \frac{\pi/2 + 1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Or, on sait que $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, ce qui entraîne que f l'est aussi.

Finalement, f est bien intégrable sur $]0,+\infty[$.

3. La fonction $x \in [1,+\infty[\mapsto \dfrac{\cos x}{x^a}$ est continue donc elle est intégrable sur tout segment de la forme $[1,A]$ avec $A > 1$. Par intégration par parties avec $u' = \cos x$ et $v = \dfrac{1}{x^a}$, c'est-à-dire $u = \sin x$ et $v' = \dfrac{-a}{x^{a+1}}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{\cos x}{x^a}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\sin x}{x^a}\right]_1^A + a\int_1^A \frac{\sin x}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\sin A}{A^a} - \sin 1 + a\int_1^A \frac{\sin x}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Or, lorsque $A \to +\infty$, on a $\left|\dfrac{\sin A}{A^a}\right| \leqslant \dfrac{1}{A^a} \to 0$ car $a > 0$, et donc $\dfrac{\sin A}{A^a} \to 0$. Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^{a+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car on a $\left|\dfrac{\sin x}{x^{a+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{a+1}}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^{a+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $a+1 > 1$. Cela implique que l'intégrale $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin x}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x$ possède une limite quand $A \to +\infty$.

Tout cela montre que $\displaystyle\int_1^A \frac{\cos x}{x^a}\,\mathrm{d}x$ a une limite quand $A \to +\infty$ et donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Exercice 2

1. Déjà, remarquons que f est continue sur $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment $[A, B]$ avec $0 < A < B$.

• Étudions l'intégrabilité de f sur $]0, 1]$. Comme $a > 0$, on a $x^a \to 0$ quand $x \to 0$, et donc $\ln(1 + x^a) \sim x^a$. Par conséquent,

$$f(x) \sim \frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}}.$$

D'après la règle de Riemann, f est donc intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $b - a < 1$, c'est-à-dire $b < a + 1$.

• Étudions l'intégrabilité de f sur $[1, +\infty[$. Vérifions que $\ln(1 + x^a) \sim a \ln x$ au voisinage de $+\infty$:

$$\ln(1 + x^a) = \ln\left(x^a\left(1 + \frac{1}{x^a}\right)\right) = \ln(x^a) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^a}\right) = a \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^a}\right).$$

Or, $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^a}\right) = o(\ln x)$ car $\dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^a}\right)}{\ln x} \to 0$ quand $x \to +\infty$. On a donc $\ln(1+x^a) = a \ln x + o(\ln x) \sim a \ln x$. Cela implique que

$$f(x) \sim \frac{a \ln x}{x^b} = \frac{a}{x^b \ln^{-1} x}.$$

Comme $-1 \leqslant 1$, la règle de Bertrand indique que $x \mapsto \dfrac{a}{x^b \ln^{-1} x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $b > 1$.

Finalement, f est intégrable sur $]0 + \infty[$ si et seulement si $b < a + 1$ et $b > 1$, c'est-à-dire $1 < b < a + 1$.

2. Faisons le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$, c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{y}$. On a alors $\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}$, et comme $y \to +\infty$ (resp. 0) quand $x \to 0^+$ (resp. $+\infty$), le théorème du cours affirme que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^a)}{x^b}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + y^{-a})}{y^{-b+2}}\,\mathrm{d}y$$

sont de même nature. Comme les fonctions $x \mapsto \dfrac{\ln(1 + x^a)}{x^b}$ et $y \mapsto \dfrac{\ln(1 + y^{-a})}{y^{-b+2}}$ sont à valeurs positives sur $]0, +\infty[$, la convergence de leurs intégrales équivaut à leur intégrabilité, et donc l'intégrabilité de la première fonction équivaut à l'intégrabilité de la deuxième.

Or comme $-a > 0$, la question précédente dit que $y \mapsto \dfrac{\ln(1 + y^{-a})}{y^{-b+2}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $1 < -b + 2 < -a + 1$, ce qui équivaut à $1 > b > a + 1$.

Exercice 3

Comme (u, v) est une famille de deux vecteurs non colinéaires, c'est une famille libre, et c'est donc une base de G. En particulier, $\dim G = 2$. Par ailleurs, cherchons une base de F. Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Alors

$$X \in F \iff \begin{cases} x + y - 2z - t = 0 \\ x - y \phantom{{}-2z} - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = y \\ t = x - y. \end{cases}$$

Cela montre que

$$F = \{(x, y, y, x - y) \mid x, y \in \mathbf{R}\} = \{x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 1, -1) \mid x, y \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, -1)).$$

Comme $((1,0,0,1),(0,1,1,-1))$ est libre (famille de deux vecteurs non colinéaires), c'est une base de F. En particulier, $\dim F = 2$.

On a donc $\dim F + \dim G = 4 = \dim \mathbf{R}^4$. Il reste à montrer que $F \cap G = \{\vec{0}\}$. L'inclusion $\{\vec{0}\} \subset F \cap G$ est évidente. Réciproquement, soit $X \in F \cap G$. Comme $X \in G$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $X = \lambda u + \mu v = (-\mu, \lambda + 4\mu, \lambda, \mu)$. De plus, comme $X \in F$, on a

$$\begin{cases} -\mu + \lambda + 4\mu - 2\lambda - \mu = 0 \\ -\mu - \lambda - 4\mu - \mu = 0, \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} 2\mu - \lambda = 0 \\ 6\mu + \lambda = 0. \end{cases}$$

On en déduit que $\lambda = \mu = 0$, et donc que $X = 0$.

Tout cela montre que $F \oplus G = \mathbf{R}^4$.

Exercice 4

1. Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $P, Q \in \mathbf{R}_2[X]$. Alors

$$\begin{aligned} u(\lambda P + Q) &= (1 - X^2)(\lambda P + Q)' + 2X(\lambda P + Q) \\ &= (1 - X^2)(\lambda P' + Q') + 2X(\lambda P + Q) \\ &= \lambda \big((1 - X^2)P' + 2XP\big) + (1 - X^2)Q' + 2XQ \\ &= \lambda u(P) + u(Q). \end{aligned}$$

Cela montre que u est une application linéaire. Pour montrer que u est un endomorphisme de $\mathbf{R}_2[X]$, il reste à voir que si $P \in \mathbf{R}_2[X]$, alors on a aussi $u(P) \in \mathbf{R}_2[X]$. Or, si $P = aX^2 + bX + c$, on vérifie que l'on a $u(P) = bX^2 + 2(a + c)X + b$, ce qui permet de conclure.

2. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$, c'est-à-dire $\lambda_1 (X+1)^2 + \lambda_2 (X^2 - 1) + \lambda_3 (X - 1)^2 = 0$. Avec $X = 1$, cette égalité donne $4\lambda_1 = 0$, d'où $\lambda_1 = 0$. De même, avec $X = -1$ il vient $\lambda_3 = 0$. Il reste alors $\lambda_2 (X^2 - 1) = 0$, d'où $\lambda_2 = 0$. Cela montre que (P_1, P_2, P_3) est famille libre. Comme elle est formée de 3 éléments et que $\dim \mathbf{R}_2[X] = 3$, il s'agit même d'une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

3. On peut utiliser la formule de $u(P)$ qu'on a trouvée en question 1, avec $P_1 = X^2 + 2X + 1$, $P_2 = X^2 - 1$ et $P_3 = X^2 - 2X + 1$. On trouve alors $u(P_1) = 2P_1$, $u(P_2) = 0$ et $u(P_3) = -2P_3$, de sorte que

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Comme (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbf{R}_2[X]$, on sait que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(P_1), u(P_2), u(P_3))$. Avec les valeurs trouvées dans la question précédente, cela donne

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(2P_1, 0, -2P_3) = \operatorname{Vect}(P_1, P_3).$$

La famille (P_1, P_3) est libre car c'est une sous-famille d'une base. Donc c'est une base de $\operatorname{Im} u$. Enfin, puisque $\operatorname{rg} u = 2$, on a $\dim \ker u = 1$ d'après le théorème du rang. Or comme $u(P_2) = 0$, on a $P_2 \in \ker u$ et comme $P_2 \neq 0$, cela montre que (P_2) est une base de $\ker u$.

Exercice 5

Supposons d'abord que $E = \operatorname{Im} u + \ker v$, et montrons que $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$.

- Si $y \in \operatorname{Im}(v \circ u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v \circ u(x)$. Alors $y = v(u(x))$, ce qui montre que $y \in \operatorname{Im} v$.

- Si $y \in \operatorname{Im} v$, il existe $x \in E$ tel que $y = v(x)$. Décomposons x selon la somme $E = \operatorname{Im} u + \ker v$: il existe $\xi \in E$ et $z \in \ker v$ tels que $x = u(\xi) + z$. Alors $y = v(x) = v(u(\xi)) + v(z) = v \circ u(\xi)$ puisque $z \in \ker v$. Ainsi $y \in \operatorname{Im}(v \circ u)$: cqfd.

Réciproquement, supposons que $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$ et montrons que $E = \operatorname{Im} u + \ker v$. L'inclusion $\operatorname{Im} u + \ker v \subset E$ est évidente. Soit donc $x \in E$ et cherchons $\xi \in E$ et $z \in \ker v$ tels que $x = u(\xi) + z$. Si cela est vrai, on a $v(x) = v(u(\xi))$, ce qui montre que ξ est un antécédent de $v(x)$ par l'application $v \circ u$.

Repartant de $x \in E$, on a $v(x) \in \operatorname{Im} v$ et comme $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im}(v \circ u)$ par hypothèse, on a $v(x) \in \operatorname{Im}(v \circ u)$, c'est-à-dire qu'il existe $\xi \in E$ tel que $v(x) = v(u(\xi))$. Posons de plus $z = x - u(\xi)$. On a alors $v(z) = v(x) - v(u(\xi)) = 0$, ce qui montre que $z \in \ker v$. On a finalement écrit $x = u(\xi) + z$ avec $\xi \in E$ et $z \in \ker v$: c'est ce qu'il fallait démontrer.