Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2024-2025
Cursus prépa 2A : Mathématiques 3 4 novembre 2024

Devoir commun n° 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**
Les exercices sont indépendants.

Partie analyse

Exercice 1. Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
2. $u_n = \dfrac{n!}{(3n)!}$.
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{2^n + 3}$.
4. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
5. $u_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$.

Exercice 2. Discuter, suivant les valeurs des paramètres a et b dans $\mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - a - \frac{b}{n}.$$

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2+1}$.

1. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1} \mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
2. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^2}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} \mathrm{d}t$ sont de même nature et la déterminer.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$. Montrer que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} T_n$.
4. À l'aide d'un encadrement série/intégrale, déterminer un équivalent simple de R_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ dont la matrice est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ — on rappelle que E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en ligne i et colonne j qui vaut 1.

1. Calculer le déterminant et le rang de A. En déduire une valeur propre de A.
2. Calculer Ax pour $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. En déduire deux autres valeurs propres de A.
3. Quels sont les coefficients remarquables du polynôme caractéristique d'une matrice ? Grâce à cela, donner toutes les valeurs propres de A avec leur multiplicité algébrique.
4. Calculer directement le polynôme caractéristique de A. Retrouver le résultat de la question précédente.
5. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de l'endomorphisme u.

Exercice 5. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ où $\epsilon_1 = (0,1,1), \epsilon_2 = (1,1,0), \epsilon_3 = (0,0,1)$. Montrer que $\ker(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{\epsilon_1\}$, $\ker(u - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{\epsilon_2\}$ et $\ker((u - 2\mathrm{Id})^2) = \mathrm{Vect}\{\epsilon_2, \epsilon_3\}$.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
3. Calculer le polynôme caractéristique et le spectre de u.
4. (a) Montrer que u admet exactement deux droites stables, que l'on précisera.

   (b) Déterminer deux plans stables par u.