
Devoir commun n° 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**

Les exercices sont indépendants.

PARTIE ANALYSE

Exercice 1.

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en $x = 2$ de $f(x) = \ln(x)$ et de $g(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.
2. En déduire la limite suivante

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x^3 - x^2 - x - 2}.$$

Exercice 2. Soit $\lambda > 0$. Déterminer en fonction de λ la convergence de l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) \ln(x)}{x^{\lambda+1}} dx.$$

Exercice 3. Pour l'affirmation ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse et justifier par une démonstration ou par un contre-exemple.

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ diverge et il existe $A > 1$ tel que pour $x \geq A$, $g(x) \geq f(x)$ alors $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ diverge.

Exercice 4. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. On suppose que $f =_{+\infty} \mathcal{O}(\frac{1}{x^a})$.

Pour quelles valeurs de a peut-on affirmer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$? On n'oubliera pas de montrer que pour les autres valeurs (s'il y en a), f n'est pas intégrable en exhibant un contre-exemple.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Notons $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E . Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de la matrice A .
2. En déduire le noyau et l'image de f .

Exercice 6. Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Les sous-ensembles de E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ? Justifier.

1. F_1 l'ensemble des fonctions paires.
2. F_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que f est paire ou impaire (ou les deux).
3. F_3 l'ensemble constitué de la fonction nulle et des fonctions f telles que $\lim_{x \rightarrow 1^+} |f(x)| = +\infty$

Exercice 7. Ici les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension 6. Soit E' un espace vectoriel de dimension 3 et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 2. Existe-t-il une application linéaire $u : E \rightarrow E'$ dont le noyau est F ? Justifier.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$ d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension n finie.
 - (a) Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de F . Justifier qu'il existe un vecteur $e_n \in E$ tel que la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ soit une base de E .
 - (b) Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $S_t = \text{Vect}\{e_1 + te_n\}$. Montrer que pour tout $t \neq 0$, S_t est un supplémentaire de F .