Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2023-2024

Mathématiques IV - Cursus préparatoire 2A — Durée : 1 h 30

Partie commune - Devoir n° 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**
Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère l'équation suivante :

$$(E) \qquad (x^2-9)y''-2xy'+2y=0$$

d'inconnue $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, deux fois dérivable.

1. Montrer que toute solution polynomiale de (E) est de degré au plus 2.
2. Déterminer toutes les solutions de (E) sous forme de fonctions polynomiales.

Notons $I_1=]-\infty;-3]$, $I_2=]-3;3[$ et $I_3=]3;+\infty[$.

3. Résoudre (E) sur I_k avec $k\in\{1,2,3\}$.
4. Résoudre (E) (sur $\mathbb{R}$).
5. Résoudre l'équation suivante sur I_3 :

$$(E') \qquad (x^2-9)y''-2xy'+2y=\frac{1}{x^2-9}.$$

Exercice 2. Soient $a,b\in]0;+\infty[$. On définit $N:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$ par $N(x,y)=\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}$.

1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, déterminer $v\in\mathbb{R}^2$ tel que $N(x,y)=\|v\|_2$.
2. Montrer que N est une norme. *Indication : pour l'un des axiomes, la question 1 pourra être utile.*
3. Dans cette question uniquement, on prend $a=5$ et $b=3$. Faire un dessin, en le justifiant, représentant la boule unité fermée de N.
4. Justifier que N est équivalente à la norme $\|\ \|_2$.
5. Déterminer le plus petit réel positif c tel que $N\leq c\|\ \|_2$.
6. De même, déterminer le plus grand réel positif d tel que $d\|\ \|_2\leq N$.

Exercice 3. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On définit $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $\varphi((x,y),(x',y')) = axx' + bxy' + cx'y + dyy'$. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des quadruplets (a,b,c,d) pour lesquels φ est un produit scalaire.

1. On suppose pour commencer que φ est un produit scalaire.
   (a) Montrer à l'aide de vecteurs bien choisis que la symétrie de φ implique $b = c$.
   (b) Montrer à l'aide d'un vecteur bien choisi que $a > 0$.
   (c) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on peut écrire $\varphi((x,y),(x,y)) = a\big(x + \frac{b}{a}y\big)^2 + ty^2$ avec t qu'on déterminera.
   (d) En déduire que $ad - b^2 > 0$.
2. A l'aide de tout ce qui précède, déterminer l'ensemble recherché dans cet exercice.