# Une correction du DS 1

## Exercice 1

(E) $(x^2-9)y'' - 2xy' + 2y = 0$

1) Soit $f$ une fonction polynomiale non nulle de E. On note $n = \deg(f)$.

On peut écrire : $f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$.

Supposons par l'absurde que $n \geqslant 3$.

Alors $\deg((x^2-9)f'') = n$ et son monôme dominant est : $n(n-1)a_n x^n$

De même : $\deg(2xf') = n$ et son monôme dominant est : $2na_n x^n$

et $\deg(2f) = n$ et son monôme dominant est : $2a_n x^n$

L'équation (E) implique alors : $n(n-1)a_n - 2na_n + 2a_n = 0$

ie $(n^2 - n - 2n + 2)a_n = 0$

D'où $n^2 - 3n + 2 = 0$ car $a_n \neq 0$

On a donc $(n-1)(n-2) = 0$. Or $n \geqslant 3$ d'où l'absurdité.

2) Par la question 1, on cherche les solution sous la forme : $x \overset{f}{\mapsto} a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

On a : $f'(x) = a_1 + 2a_2 x$ et $f''(x) = 2a_2$.

(E) devient alors : $(x^2-9)2a_2 - 2x(a_1 + 2a_2 x) + 2(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 0$

i.e. $(2a_2 - 4a_2 + 2a_2)x^2 + (-2a_1 + 2a_1)x - 18a_2 + 2a_0 = 0$

i.e. $a_0 = 9a_2$

i.e. $f(x) = 9a_2 + a_1 x + a_2 x^2 = a_1 x + a_2(9 + x^2)$

Ainsi l'ensemble des solutions polynomiales de (E) est :

$$\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ t.q } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha x + \beta(9 + x^2) \}.$$

3) Soit $k \in \{1,2,3\}$. Alors (E) est équivalente à $y'' - \frac{2x}{x^2-9}y' + \frac{2}{x^2-9}y = 0$ sur $I_k$. Sur $I_k$, l'espace des solutions est de dimension 2.

Les solutions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 9 + x^2$ forment un système fondamental de solutions.

4) Ici il s'agit de "recoller" les solutions obtenues sur chaque $I_k$.

Notons $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto 9 + x^2$.

Soit $f$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Alors $\exists \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{R}$ tq pour $k \in \{1,2,3\}$,

$\forall x \in I_k,\ f(x) = \alpha_k f_1(x) + \beta_k f_2(x).$

Par continuité de $f$ en $-3$, on a :

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ >}} f(x)$ ie $-3\alpha_1 + 18\beta_1 = -3\alpha_2 + 18\beta_2$ (1)

De même, en 3 : $3\alpha_2 + 18\beta_2 = 3\alpha_3 + 18\beta_3$ (2)

. On considère les limites en $-3$ et en $3$ de $f'(x)$ :

sur $I_k$, $f'(x) = \alpha_k + 2\beta_k x$

et on obtient par continuité de $f'$ en $-3$ et $3$ :

$\alpha_1 - 6\beta_1 = \alpha_2 - 6\beta_2$ (3) et $\alpha_2 + 6\beta_2 = \alpha_3 + 6\beta_3$ (4)

On constate que : (3) $\Leftrightarrow$ (1) et (4) $\Leftrightarrow$ (2).

. Regardons la dérivabilité de $f'$ en 3 et $-3$ :

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ <}} \frac{f'(x) - f'(-3)}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{(\alpha_1 + 2\beta_1 x) - (\alpha_1 - 6\beta_1)}{x+3}$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{2\beta_1(x+3)}{x+3} = 2\beta_1$$

La dérivabilité à droite impliquera : $2\beta_1 = 2\beta_2$

En $x = 3$ : $$\lim_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{f'(x) - f'(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(\alpha_2 + 2\beta_2 x) - (\alpha_2 + 6\beta_2)}{x-3}$$
$$= \lim_{x \to 3} \frac{2\beta_2(x-3)}{x-3} = 2\beta_2$$

On obtient $2\beta_2 = 2\beta_3$.

Finalement $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$. Grâce aux équations (1) et (2), on obtient également $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

Ainsi : $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha x + \beta(9 + x^2)$

La réciproque est triviale : si $f$ est de cette forme sur $\mathbb{R}$ alors $f$ est solution de (E).

5) Ici on travaille sur $I_3$ avec l'équation $(E')$ : $y'' - \frac{2x}{x^2-9} y' + \frac{2}{x^2-9} y = \frac{1}{(x^2-9)^2}$

On va utiliser la variation des constantes

On cherche une solution particulière de la forme : $y(x) = \alpha(x) x + \beta(x)(9+x^2)$

avec les conditions $\begin{cases} \alpha'(x)\, x + \beta'(x)(9+x^2) = 0 \\ \alpha'(x) + 2\beta'(x)\, x = \dfrac{1}{(x^2-9)^2} \end{cases}$

On a $\alpha' = -\beta' \dfrac{x^2+9}{x}$ et $-\beta' \dfrac{x^2+9}{x} + 2\beta' x = \dfrac{1}{(x^2-9)^2}$

D'où $\beta' \left( 2x - \dfrac{x^2+9}{x} \right) = \dfrac{1}{(x^2-9)^2}$

$$\beta' \left( \frac{x^2-9}{x} \right) = \frac{1}{(x^2-9)^2} \quad \text{d'où } \beta' = \frac{x}{(x^2-9)^3} = \frac{-1}{4} \times \frac{-4x}{(x^2-9)^3}$$

Une primitive est $\beta = -\dfrac{1}{4(x^2-9)^2}$

D'autre part : $\alpha' = \dfrac{-x}{(x^2-9)^3} \times \dfrac{x^2+9}{x} = -\dfrac{x^2+9}{(x^2-9)^3} = -\dfrac{x^2-6x+9+6x}{(x^2-9)^3}$

$$= -\frac{(x-3)^2}{(x-3)^2(x+3)^2} - \frac{6x}{(x^2-9)^3} = \frac{-1}{(x+3)^2} - \frac{6x}{(x^2-9)^3}$$

$\dfrac{1}{(x+3)^2} = \dfrac{a}{x+3} + \dfrac{bx}{(x+3)^2} = \dfrac{(a+b)x+3a}{(x+3)^2}$ : $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$

D'où $\alpha' = \dfrac{-1}{3(x+3)} + \dfrac{x}{3(x+3)^2} - \dfrac{6x}{(x^2-9)^3}$

$$\alpha = -\frac{1}{3}\ln(x+3) - \frac{1}{3}\frac{1}{x+3} + \frac{3}{2(x^2-9)^2}$$

Une solution de $(E')$ est donc :

$$y_0 = \left( -\frac{1}{3}\ln(x+3) - \frac{1}{3}\frac{1}{x+3} + \frac{3}{2(x^2-9)^2} \right) x + \frac{-(9+x^2)}{4(x^2-9)^2}$$

La solution générale de $(E')$ sur $I_3$ est :

$$f = \alpha x + \beta(9+x^2) + y_0 \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

## Exercice 2

1) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $v = (ax, by)$. Alors
$\|v\|_2 = \sqrt{(ax)^2 + (by)^2} = N(x,y)$

2). Séparation : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q $N(x,y) = 0$. Alors $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$
puis $ax = by = 0$ (car somme de carrés nulle) puis $x = y = 0$ car $a, b > 0$

. Homogénéité : Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$$N(\lambda(x,y)) = N(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{(a\lambda x)^2 + (b\lambda y)^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2x^2 + b^2y^2)} = |\lambda| N(x,y)$$

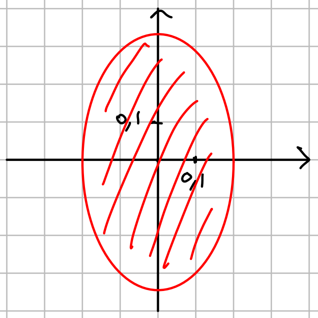
. Inégalité triangulaire : Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$.
Par 1), $N((x,y) + (x',y')) = N(x+x', y+y') = \|(a(x+x'), b(y+y'))\|_2$
$$= \|(ax, by) + (ax', by')\|_2 \leq \|(ax,by)\|_2 + \|(ax', by')\|_2$$
$$= N(x,y) + N(x',y').$$

3) $\bar{B}(0,1) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \sqrt{25x^2+9y^2} \leq 1\}$

$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 25x^2+9y^2 \leq 1\}$

Le bord de $\bar{B}(0,1)$ est l'ellipse d'équation $25x^2+9y^2=1$

Ses sommets sont les points $(0,\frac{1}{3})$, $(0,-\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{5},0)$, $(-\frac{1}{5},0)$




4) $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie et toutes ses normes sont équivalentes

5) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a $N(x,y) = \|(ax,by)\|_2$.

Supposons $a \geq b$ : $\|(ax,by)\|_2 = \sqrt{a^2x^2+b^2y^2} \leq \sqrt{a^2x^2+a^2y^2} = a\|(x,y)\|_2$

Si $b\geq a$ on obtient de même : $N(x,y) \leq b\|(x,y)\|_2$

Notons $M = \max\{a,b\}$. Alors $N(x,y) \leq M\|(x,y)\|_2$

Par définition de $c$, on a : $c \leq M$.

Si $a\geq b$ : $N(1,0) = \sqrt{a^2} = a = a\|(1,0)\|_2 \leq c\|(1,0)\|_2$ donc $c\geq a$

et si $b\geq a$ : $N(0,1) = b\|(0,1)\|_2 \leq c\|(0,1)\|_2$ donc $c\geq b$

d'où $c\geq M$. Finalement $c = M = \max\{a,b\}$.

6) Je ne détaille pas cette question. En faisant comme au 5) on trouve que $d = \min\{a,b\}$.

## Exercice 3

1)(a) On a : $\varphi((1,0),(0,1)) = b$ et $\varphi((0,1),(1,0)) = c$ donc $b=c$

(b) $\varphi((1,0),(1,0)) = a > 0$ car $\varphi$ est définie-positive

(c) $\varphi((x,y),(x,y)) = ax^2+2bxy+dy^2 = a(x^2+2x\frac{b}{a}y)+dy^2$

$= a\left((x+\frac{b}{a}y)^2 - \frac{b^2}{a^2}y^2\right)+dy^2$

$= a(x+\frac{b}{a}y)^2 + (d-\frac{b^2}{a})y^2 = a(x+\frac{b}{a}y)^2+\left(\frac{ad-b^2}{a}\right)y^2$

(d) Si on avait $ad-b^2\leq 0$ alors en prenant $(x,y) = (-\frac{b}{a},1)$ on aurait $\varphi((x,y),(x,y)) = \frac{ad-b^2}{a} \leq 0$ Absurde car $(x,y)\neq(0,0)$

(2) Par 1), on a montré que si $\varphi$ est un produit scalaire alors $a>0$, $b=c$ et $ad-b^2>0$. Réciproquement avec ces conditions, nous devons montrer que $\varphi$ est un produit scalaire : l'écriture de la question 1)(c) nous donnera $\varphi$ définie-positive. Quant à la symétrie et la linéarité à gauche (ou à droite), je laisse les vérifications en exercice.