Devoir surveillé 3
Correction partie analyse

6 novembre 2023

Exercice 1

Déterminer la nature de la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Correction

En utilisant le développement limité du sinus en 0, on a

$$\begin{aligned}(-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to\infty}{=} (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\ &\underset{n\to\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right).\end{aligned}$$

Or, comme la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante et tend vers 0, d'après le critère spécial des séries alternées, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série convergente. Et, d'après le critère de Riemann et le théorème de comparaison, le terme restant est également le terme général d'une série convergente. En conclusion, la série proposée converge.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{e^{-x/n}}{1+x^2}$$

   est d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+$.
2. On pose donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Correction

Question 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est bien définie (puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + x^2 > 0$) et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$f_n(x) \underset{x\to\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Or $x > 0 \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ d'après le critère de Riemann, donc, par théorème de comparaison, f_n l'est également. Finalement, l'intégrale $\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est bien définie.

Question 2. On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.

- Toutes les fonctions f_n sont continues par morceaux, car continues.
- La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- f est continue par morceaux.
- Domination : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geqslant 0$, on a

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$

Or la fonction $x \geqslant 0 \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable, en utilisant le même raisonnement qu'à la question 1.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite (I_n) converge donc vers

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 3

On pose, pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \cos x \, \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sin(2x).$$

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{2x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Tracer le graphe de f. *On prendra soin de faire un schéma propre, respectant les propriétés essentielles de f (variations, symétries, limites), et d'expliciter ses zéros.*
4. En utilisant une formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin x - x| \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

5. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur tout segment.
On pourra utiliser la question précédente ainsi que l'inégalité $|\sin x| \geqslant \frac{2}{\pi}|x|$ pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
6. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Correction

Question 1. On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on montre la formule demandée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, on a bien $\sin x\, f_0(x) = \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$, d'après la formule du duplication du sinus.
- Supposons la formule établie au rang $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f_{n+1}(x) &= \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) f_n(x) \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f_n(x) && \text{par la formule du duplication du sinus} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sin(2x) && \text{par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Ainsi la formule est bien démontrée pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Question 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 1$, donc $f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Par parité de f_n et de f, il reste seulement à vérifier que f_n converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x > 0$. A partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $0 < x < 2^n\pi$, donc $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$. Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, on a

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}, \tag{1}$$

qui converge vers $\frac{\sin(2x)}{2x}$ quand n tend vers l'infini, puisque $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$. Finalement, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f.

Question 3. La fonction f est paire, et continue (en effet, $\frac{\sin(2x)}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$). Elle tend vers 0 en $\pm\infty$. Elle s'annule en les points d'annulation non nuls de la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ et change de signe à chaque point d'annulation.

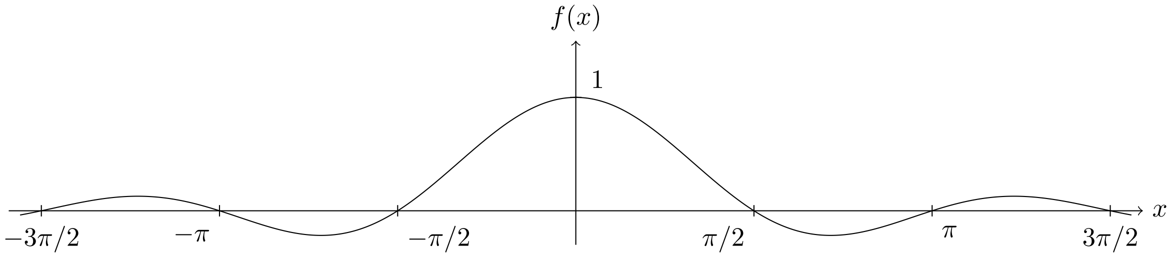

FIGURE 1 – Graphe de f

Question 4. Soit $x \neq 0$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction sinus sur $[0, x]$, on obtient

$$|\sin x - \sin 0 - (\cos 0)x| \leqslant \frac{x^2}{2} \sup_{0\leqslant t\leqslant x} |-\sin t|,$$

d'où l'inégalité recherchée.

Question 5. Soit $A > 0$. On va montrer la convergence uniforme sur $[-A, A] \setminus \{0\}$, ce qui suffit pour avoir la convergence uniforme sur $[-A, A]$ (puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 1 = f(0)$), puis, ceci étant vrai pour tout $A > 0$, sur tout segment. Il existe n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $A < 2^{n-1}\pi$. En particulier, pour tout $x \in [-A, A] \setminus \{0\}$ et $n \geqslant n_1$, on a $\sin(x/2^n) \neq 0$, donc (1) est valable. Ainsi, pour $x \in [-A, A] \setminus \{0\}$ et $n \geqslant n_1$,

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{\sin(2x)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} - \frac{\sin(2x)}{2x} \right| \\
&= \frac{|\sin(2x)|}{2^{n+1}} \left| \frac{\frac{x}{2^n} - \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\frac{x^2}{2\cdot 4^n}}{\frac{2x^2}{\pi 4^n}} = \frac{\pi}{2^{n+3}}
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de la question 3 et celle admise dans l'énoncé (noter qu'on a bien $x/2^n \in [-\pi/2, \pi/2]$ par choix de n_1). Ainsi, pour $n \geqslant n_1$,

$$\|f_n - f\|_{\infty,[-A,A]\setminus\{0\}} \leqslant \frac{\pi}{2^{n+3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

La convergence est donc bien uniforme sur $[-A, A] \setminus \{0\}$, d'où le résultat.

Remarque subsidiaire. Pour démontrer l'inégalité admise dans l'énoncée de la question 5, on remarque que la fonction sinus est concave sur $[0, \pi/2]$, car sa dérivée seconde, l'opposé du sinus, y est négative. Donc le graphe du sinus sur cet intervalle est au-dessus de la corde qui rejoint les points $(0, \sin 0) = (0, 0)$ et $(\pi/2, \sin(\pi/2)) = (\pi/2, 1)$. Cette corde a pour équation $y(x) = \frac{2}{\pi}x$. D'où l'inégalité par imparité du sinus.

Question 6. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$; en effet, $|f_n(2^n\pi) - f(2^n\pi)| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (attention, ici, on revient à la définition de f_n, on ne peut pas utiliser (1)).