Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024

Mathématiques III PMI 9 octobre 2023. Durée : 1 h 30

Devoir n° 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**

Les exercices sont indépendants.

La partie d'analyse et la partie d'algèbre doivent être rédigées sur deux feuilles distinctes.

Partie analyse

Exercice 1. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
2. $u_n = \left(\tan(\frac{1}{n})\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique tendant vers 0 et a, b, c trois réels vérifiant $a + b + c = 0$, on pose pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$$

Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Exercice 3. On considère la suite numérique (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \pi\mathbb{N}$$

1. On suppose que $a \neq 1$. Préciser si la série $\sum u_n$ converge ou pas.

2. On pose pour tout $n \geq 1$, $a_n = \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

3. Utiliser le point 2 pour étudier la convergence de la suite (u_n) pour $a = 1$.

Partie algèbre

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Determiner l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lequelles $f - \lambda \operatorname{Id}$ n'est pas inversible.
2. Determiner une base de $\ker(f - \operatorname{Id})$ et $\ker(f - 3\operatorname{Id})$.
3. Prouver que $\ker(f - \operatorname{Id})$ et $\ker(f - 3\operatorname{Id})$ sont supplémentaires.
4. En deduire qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est diagonale.

Exercice 5. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et donner une preuve ou un contre-exemple selon les cas.

1. Si le produit de deux matrices carrées est inversible, alors chaque matrice du produit l'est aussi.
2. Si $\sigma \in S_n$ est une permutation telle que $\sigma \circ \sigma = \operatorname{Id}$ alors σ est un cycle de longueur 2.
3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ satisfont $\det(A + B) = \det(B)$ alors A est la matrice nulle.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\sigma, \tau \in S_n$ deux cycles de longueurs k à supports disjoints, alors $(\sigma \circ \tau)^k = \operatorname{Id}$.

Exercice 6. Soit A, B deux matrices réelles, carrées de taille n. Soient

$$C = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad D = \begin{pmatrix} A + iB & 0 \\ B & A - iB \end{pmatrix}$$

deux matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Prouver que $\det(C) = \det(D)$.
2. Pour un nombre complexe $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on note $\overline{z} = a - ib$. Prouver que $\det(C) = \det(A + iB)\overline{\det(A + iB)}$.
3. En deduire que $\det(C) \geq 0$.