Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 5

Espaces euclidiens orientés

Exercice 1. Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et u et v deux vecteurs non nuls de E.

1. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme $\frac{u}{\|u\|}$ en $\frac{v}{\|v\|}$.

   On rappelle que l'on appelle alors (mesure de l')angle orienté de vecteurs $\widehat{(u,v)}$ une mesure θ de l'angle de la rotation r.

2. Soit $w \in E$ non nul. Montrer que $\widehat{(u,w)} \equiv \widehat{(u,v)} + \widehat{(v,w)}$ $[2\pi]$.

3. Notons $\theta = \widehat{(u,v)}$. Montrer que $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|\cos(\theta)$ et $\det(u,v) = \|u\|\|v\|\sin(\theta)$ (où le déterminant est pris dans une base orthonormée directe).

4. Soit f un endomorphisme orthogonal de E.
   (a) On suppose que f est direct. Montrer que $(\widehat{f(u), f(v)}) \equiv \widehat{(u,v)}$ $[2\pi]$.
   (b) On suppose que f est indirect. Montrer que $(\widehat{f(u), f(v)}) \equiv -\widehat{(u,v)}$ $[2\pi]$.
   (c) Application : Soit (ABC) un triangle isocèle en A (*i.e.* tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$).
   Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ $[2\pi]$.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Déterminer l'expression dans la base $\mathcal{B}$ du produit vectoriel de deux vecteurs u et v de E en fonction de leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$.

2. Soient u, v deux vecteurs normés orthogonaux de E et $w \in E$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base orthonormée de E si et seulement si $w = \pm u \wedge = v$. À quelle condition cette base est-elle directe ?

3. Application : Déterminer toutes les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$.

4. Démontrer la formule du double produit vectoriel :
$$\forall (u, v, w) \in E, \quad u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w.$$

5. Soient $a, b, c \in E$ non nuls. On note $a' = b \wedge c$, $b' = c \wedge a$, $c' = a \wedge b$ et $v = \|a\|a' + \|b\|b' + \|c\|c'$. On suppose que $v \neq 0$. Montrer que :
$$\cos\widehat{(v,a)} = \cos\widehat{(v,b)} = \cos\widehat{(v,c)}.$$

Exercice 3. On se place dans $\mathbb{R}^3$ (orienté par la base canonique usuelle).

1. On considère un parallélogramme engendré par deux vecteurs (non nuls) u et v. Exprimer la valeur absolue de l'aire du parallélogramme en fonction du produit vectoriel de u et v.

2. On considère $(OABC)$ un trièdre rectangle, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ soient orthogonaux deux à deux. Montrer que le carré de l'aire du triangle (ABC) est égal à la somme des carrés des aires des trois autres triangles (OAB), (OBC) et (OCA).

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté.

1. Soient w un vecteur unitaire de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la rotation r d'angle θ autour de l'axe D dirigé et orienté par le vecteur w.
   (a) Soit $x \in E$ un vecteur orthogonal à w. Montrer que $r(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)w \wedge x$.
   (b) On suppose désormais que x est un vecteur unitaire orthogonal à w. Montrer que
   $$\cos(\theta) = \langle x, r(x)\rangle \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = [x, r(x), w] = [w, x, r(x)]$$
   où $[a, b, c]$ désigne le produit mixte des vecteurs $a, b, c \in E$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur $w = (1, 1, 0)$.
3. Déterminer la nature de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E est
   $$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$
   Préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Le but de l'exercice est de démontrer l'équivalence suivante :
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \iff f \text{ est une rotation ou } f = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Supposons que f est une rotation.
   (a) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $[f(x), f(y), f(z)] = [x, y, z]$ (où [ ] désigne le produit mixte).
   (b) Pour $(x, y, z) \in E^3$, simplifier $\langle f(x \wedge y) - f(x) \wedge f(y), z\rangle$.
   (c) Conclure.
2. Supposons désormais que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et vérifie : $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E. Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base orthonormée directe de E.
   (c) Conclure.
3. Deuxième méthode pour le sens direct : supposons que $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
   (a) Simplifier $\langle f(x) \wedge f(y), f(z)\rangle$ pour $(x, y, z) \in E^3$.
   (b) Montrer que pour tout $w \in E$, il existe $x, y \in E$ tels que $w = x \wedge y$.
   (c) En déduire que $f^\star \circ f = \det(f)\mathrm{Id}$.
   (d) Démontrer qu'alors $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou f est une rotation.