

# Algèbre IV - CF Corrigé.

24.05.2018

## Exercice 1.

- (a) Dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  déterminer la matrice  $A$  de la projection orthogonale  $\Phi$  sur la droite d'équation  $x_1 = x_2$ .  
Indication : Donner un vecteur-directeur de la droite en question et préciser comment  $\Phi$  agit sur les vecteurs de la base canonique.
- (b) Trouver une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$  dans laquelle  $\Phi$  a pour matrice  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et écrire la relation entre  $A$  et  $B$ .
- (a) Dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  déterminer la matrice  $C$  de la symétrie  $\Psi$  par rapport à la droite d'équation  $x_2 = \sqrt{3}x_1$ .  
Indication : Donner un vecteur-directeur de la droite en question et préciser comment  $\Psi$  agit sur les vecteurs de la base canonique.
- (b) Trouver une base orthonormée de  $\mathbb{R}^2$  dans laquelle  $\Psi$  a pour matrice  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  et écrire la relation entre  $C$  et  $D$ .

1a) On peut choisir  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  comme vecteur-directeur, par exemple.

$$\Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

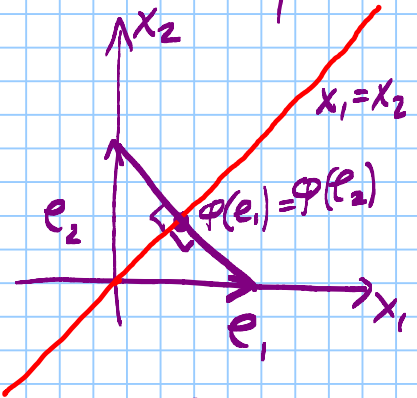
$$\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \|^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 1+1 = 2$$

$$\Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Géométriquement:



1b)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  a deux valeurs propres  $\lambda=1$  et  $\mu=0$  ( $\det A = 0 = \lambda\mu$ ,  $\text{tr} A = 1 = \lambda + \mu$ )

L'espace propre de  $\lambda=1$  est engendré par le vecteur unitaire  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et un vecteur-directeur unitaire de la droite perpendiculaire à la droite  $x_1 = x_2$  engendre l'espace propre de  $\mu=0$

On peut choisir  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  (ou  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ )

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  forment une base orthonormée dans laquelle  $\Phi$  a  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  pour matrice.

La matrice de passage de la base canonique vers la base orthonormée  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  est

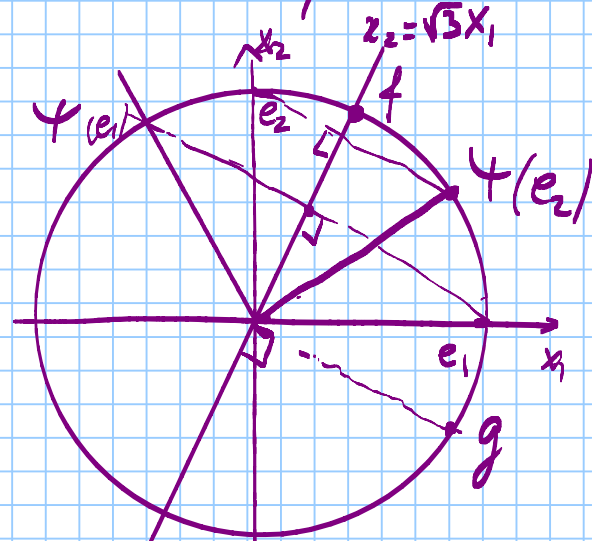
$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . C'est une matrice orthogonale

$P^{-1} = {}^t P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A = {}^t P B P$

Exo 1.2a) On peut prendre

$f = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$  pour vecteur-directeur unitaire

Géométriquement



La formule pour une réflexion par rapport à la droite est

$$\psi \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2 \text{Proj} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \text{Id} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\psi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\psi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

On peut en voir le fait géométriquement.

$$C = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exo 2.26.  $\psi(f) = f$  et  $\psi(g) = -g$  où  $f = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$  et  $g = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$  la matrice dans la base  $\{f, g\}$  est

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . La matrice de passage  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \{f, g\}$

est  $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ ,  $Q^{-1} = {}^t Q$  (matrice de passage entre deux bases orthonormées)

et  $C = {}^t Q D Q$

### Exercice 2.

On note  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $m$  colonnes à coefficients réels. On considère un espace euclidien  $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$  muni d'un produit scalaire suivant :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y \rangle := {}^t X \cdot Y,$$

donné par le produit usuel des matrices.

Soit  $S \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  une matrice symétrique définie positive.

Rappel :

- la matrice  $S$  est symétrique si pour tout vecteur  $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ ,  $\langle X, SX \rangle = \langle SX, X \rangle$ .
- la matrice  $S$  est définie positive si pour tout vecteur  $X \neq 0, X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$  on a  $\langle X, SX \rangle > 0$ .

1. Montrer que toutes les valeurs propres de  $S$  sont strictement positives.
2. Citer les résultats du cours qui permettent d'affirmer qu'il existe une matrice  $R$  et une matrice  $P$  telles que  $S = {}^t P R^2 P$ .
3. En déduire qu'il existe une matrice inversible  $M$  telle que  $S = {}^t M M$ .
4. Soient  $a, b, c$  des réels. À quelles conditions sur  $a, b, c$  la matrice

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

est-elle définie positive ?

5. Donner un exemple d'une matrice  $n \times n$  (avec  $n \geq 2$ ) symétrique définie positive.

1. On a  $\langle X, SX \rangle > 0, \forall X$ . Soit  $v$  un vecteur propre de valeur propre  $\lambda$ .  $Sv = \lambda v$ .

On a  $\langle X, SX \rangle = \lambda \langle X, X \rangle > 0$  (comme  $\langle X, X \rangle > 0$  (car  $X \neq 0$  et  $\langle, \rangle$  est le produit scalaire), alors  $\lambda > 0$  aussi

2. La matrice symétrique  $S$  définit une application auto adjointe.

Par le thm. spectral cette application est diagonalisable dans une base orthonormée constituée de vecteurs propres de  $S$ . Soit  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  - la matrice diagonale t.g.  $S = P^{-1} D P$

- Par le 1)  $\lambda_i > 0$  pour  $\forall i$ , alors possède une racine carré dans  $\mathbb{R}$

$$\text{D'où } R = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage  $P$  de la base canonique vers une base orthonormée de vecteurs propres est orthogonale. D'où  $P^{-1} = {}^t P$  et le résultat suit.

Exo 2.3 On pose  $M = {}^t P R P$   
 alors  ${}^t M = {}^t ({}^t P M P) = {}^t P {}^t R {}^t ({}^t P) = {}^t P R P$   
 Comme  $R$  est diagonale  ${}^t R = R$   
 Finalement,  ${}^t M M = {}^t P R P \underbrace{{}^t P R P}_{\text{id. car } P^{-1} = {}^t P} = {}^t P R^2 P = S$

Exo 2.4 On remarque que  $A$  est  
 symétrique  ${}^t A = A$ :  ${}^t \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$   
 Pour être définie positive on utilise  
 la condition de positivité des valeurs  
 propres. Soit  $\lambda, \mu$  - les valeurs props  
 de  $A$ . On a  $\det A = ab - c^2 = \lambda \mu$   
 et pour la trace:  $\text{tr} A = a + b = \lambda + \mu$

$$\begin{cases} ab - c^2 > 0 \\ a + b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab > c^2 \\ a + b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a \text{ et } b \\ \text{sont positives} \\ \text{et } ab > c^2 \end{matrix}$$

Exo 2.5 Par exemple,  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  ou bien  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice 3.**

On note  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  l'espace des matrices  $2 \times 2$  à coefficients complexes.  
 On pose  $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid A = {}^t \bar{A} \text{ et } \text{tr}(A) = 0\}$ .

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ .

(a) Montrer que  $A$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & r + is \\ r - is & -a \end{pmatrix}$  avec  $a, r, s$  réels.

(b) En déduire que  $V$  est un espace vectoriel réel de dimension 3 dont une base  $\mathcal{B}$  est formée par les matrices

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Montrer que l'application définie sur  $V \times V$  par :

$$(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(AB)$$

défini un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel  $V$ .

(d) En notant  $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$  la norme de  $A$ , exprimer  $\|A\|^2$  en fonction du déterminant de  $A$ .

(e) Pour  $j, k$  appartenant à l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ , calculer les produits scalaires  $\langle E_j, E_k \rangle$ . Que peut-on dire de la base  $\mathcal{B}$ ?

2. Soit  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  une matrice telle que  ${}^t \bar{P} = P^{-1}$ . On note  $l_P$  l'endomorphisme de  $V$  défini par :

$$\forall A \in V, l_P(A) = PAP^{-1}.$$

(a) Montrer que  $l_P$  est un endomorphisme *orthogonal* de  $V$  muni du produit scalaire défini ci-dessus, c'est-à-dire  $\|l_P(A)\| = \|A\|$ .

(b) Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On considère  $P = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ . Pour  $j = 1, 2, 3$  exprimer  $l_P(E_j)$  comme combinaison linéaire de  $E_1, E_2, E_3$  (on rappelle que  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ).

(c) Donner la matrice de  $l_P$  dans la base  $\{E_1, E_2, E_3\}$  et en déduire que  $l_P$  est une rotation de l'espace euclidien  $V$  dont on donnera un vecteur qui dirige l'axe de rotation.

Exo 3.1a  
 $\text{tr} A = a + d = 0 \Rightarrow d = -a$

et  $A = {}^t \bar{A}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \bar{a} \\ b = \bar{c} \\ c = \bar{b} \end{cases}$$

D'où  $a$  est réel et si  $b = r + is$ , alors  $c = r - is$ , avec  $r, s \in \mathbb{R}$

1b)  $\begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

Donc en effet toute matrice se décompose en combinaison linéaire de  $E_1, E_2, E_3$  de façon unique.  $a, r, s$  - sont les coordonnées

1c)  $\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(AB)$  on pose  $A = (a, r, s)$  et  $B = (a', r', s')$

$$AB = \begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & r'+is \\ r'-is & -a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + rr' + ss' & * \\ +i(rs - r's) & * \end{pmatrix}$$

$$AB = aa' + rr' + ss' \quad * \quad rt' + ss' - i(rs - r's) + aa'$$

C'est un produit scalaire car

- bilinéaire :  $\text{tr}(A + \lambda A') \cdot B = \text{tr} AB + \lambda \text{tr} A'B$ .

- symétrique :  $\text{tr} AB = \text{tr} BA$

- défini positif :  $\text{tr} A^2 = a^2 + r^2 + s^2 > 0$

1d)  $\det A = a \cdot (-a) - (r+is)(r-is) = -a^2 - r^2 - s^2$   
 $= -\text{tr} A^2$

1e)  $\text{tr} E_1^2 = -\det E_1 = 1$   
 $\text{tr} E_2^2 = -\det E_2 = 1$

$\text{tr} E_3^2 = -\det E_3 = 1$

ou bien par le calcul directe:

$$E_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \text{tr} E_1^2 = 1 \quad \left| \quad E_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \text{tr} E_1 \cdot E_2 = 0$$

$$E_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \text{tr} E_2^2 = 1 \quad \left| \quad E_1 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \text{tr} E_1 \cdot E_3 = 0$$

$$E_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \text{tr} E_3^2 = 1 \quad \left| \quad E_2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \text{tr} E_2 \cdot E_3 = 0$$

On se rend compte que  $\{E_1, E_2, E_3\}$  forment une base orthonormée.

2a)  $\ell_p$  preserve  $V$ : on montre que  ${}^t(\overline{\ell_p A}) = \ell_p A$   
 ${}^t(\overline{PAP^{-1}}) = {}^t(\overline{P^{-1}}) \overline{A} {}^t \overline{P} = (P^{-1})^{-1} A P^{-1} = PAP^{-1}$  ( ${}^t \overline{P} = P^{-1}$  et  ${}^t(\overline{P^{-1}}) = ({}^t P)^{-1}$ )

Pour m.g.  $\|\ell_p A\| = \|A\|$ ,  $\|\ell_p(A)\| = \sqrt{\text{tr}(PAP^{-1})^2}$

On va utiliser le 1d:  $\text{tr} A^2 = -\det A$

1ci:  $\det(PAP^{-1}) = \det A$  d'où le résultat

$$2b) P = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$PE_1P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{E_1}$$

$$PE_2P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\theta} \\ e^{-2i\theta} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos 2\theta + i \sin 2\theta \\ \cos 2\theta - i \sin 2\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cos 2\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin 2\theta \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\cos 2\theta \cdot E_2 + \sin 2\theta \cdot E_3}$$

$$PE_3P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i e^{i\theta} \\ -i e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i e^{i2\theta} \\ -i e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \cos 2\theta - \sin 2\theta \\ -i \cos 2\theta - \sin 2\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\sin 2\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \cos 2\theta \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-\sin 2\theta \cdot E_2 + \cos 2\theta \cdot E_3}$$

2c) La matrice de  $\ell_p$  est alors  $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$  avec l'axe de rotation dirigé par  $E_1$