Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2016-2017

Cursus prépa- Première année

Fondamentaux des Maths I – DS n° 3

Partie commune (1H30)

- *L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*
- *Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.*
- ***L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil (téléphone portable, grille-pain,...) est prohibé****.*

Questions de cours :

1. On rappelle que le logarithme néperien est la fonction ln définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$
2. Donner les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction arctan. Donner l'expression de la dérivée de arctan.

Exercice 1. *(Extrait de l'épreuve de mathématiques du Bac 2007, Tunisie)*

On rappelle le théorème des valeurs intermédiaires vu en Terminale :

Théorème. *Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction* ***continue****. Alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.*

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x + 1 + e^x$.
   (a) Dresser le tableau des variations de g.
   (b) Montrer que g est injective.
   (c) Étudier le signe de $g(-1)$ et $g(-2)$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $-2 < \alpha < -1$.
   (d) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{xe^x}{1+e^x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

(b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à ses asymptotes.

(c) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x g(x)}{(1+e^x)^2}$.

(d) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

(e) Montrer que $f(\alpha) = 1 + \alpha$ où α est le réel défini à la question 1.(c).

(f) Donner le tableau des variations de f.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que les tangentes et asymptotes précédemment déterminées (on prendra 2cm comme unité de longueur ; on donne $\alpha \approx -1,28$).

Exercice 2. Dire si l'ensemble $A = \left\{(x^2-1)e^{-x},\ x \in \mathbb{R}\right\}$ a un minimum ou un maximum, et si oui déterminer leurs valeurs.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \operatorname{argth}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et préciser l'ensemble sur lequel f est continue.
2. Déterminer l'ensemble sur lequel f est dérivable et calculer f' sur cet ensemble.
3. Dresser le tableau des variations de f et tracer son graphe.
4. Donner une expression plus simple de f, valable sur tout son domaine de définition.