Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2016 - 2017
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°2
PARTIE COMMUNE - CORRIGÉ

<u>Exercice 1 :</u> *Questions de cours*

1 - Soit E un ensemble, et A, B, C $\in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$\begin{aligned} y \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow (y \in A \text{ et } y \in (B \cup C)) \\ &\Leftrightarrow y \in A \text{ et } (y \in B \text{ ou } y \in C) \\ &\Leftrightarrow (y \in A \text{ et } y \in B) \text{ ou } (y \in A \text{ et } y \in C) \\ &\Leftrightarrow y \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

2 - Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A, B $\in \mathcal{P}(E)$.
a. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Rightarrow y = f(x) \text{ avec } x \in A \cap B \\ &\Rightarrow (y = f(x) \text{ avec } x \in A) \text{ et } (y = f(x) \text{ avec } x \in B) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \text{ et } y \in f(B) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

b. Donner un exemple pour lequel il n'y a pas égalité.

Il suffit de considérer $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ avec $A = [-1, 0]$ et $B = [0, 1]$:
$f(A) = f(B) = [0, 1] \Rightarrow f(A) \cap f(B) = [0, 1]$.
$f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$.

<u>Exercice 2 :</u>

1 - Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :
Dans le cas où l'assertion est fausse, on pourra proposer une démonstration en donnant un contrexemple.

a. $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}\ ,\ xy > 0$.

L'assertion **a.** est **fausse** : on montre sa négation, c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ ,\ xy \leq 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Le cas $y = 0$ fournit l'existence d'un y dans $\mathbb{R}$ tel que $xy \leq 0$.

b. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}\ ,\ xy > 0$.

L'assertion **b.** est **fausse** : on cherche un contrexemple.
Prenons $x = 0$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $xy \leq 0$.

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
c. $\forall\, f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\,, \exists\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ f(x) \neq f(y)$.

L'assertion **c.** est **fausse** : on cherche un contrexemple.
Considérons la fonction $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(y) = 0$. La fonction nulle fournit donc un contrexemple.

On considère à présent la fonction $f\ : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$.

d. $\exists\, \epsilon > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) > \epsilon$.

L'assertion **d.** est **fausse** elle aussi : on montre sa négation : $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq \epsilon$. .
Soit $\epsilon > 0$. Le réel $x = \dfrac{1}{\epsilon}$ vérifie $f(x) = \epsilon \leq \epsilon$.

2 - Donner la négation des assertions ci-dessus.

La négation des assertions **a.** et **d.** a été établie précédemment.
b. $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}\ ,\ xy \leq 0$.
c. $\exists\, f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})\, , \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ f(x) = f(y)$.

<u>Exercice 3 :</u>

Soit $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\, , |z| = 1\}$. On considère l'application :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} \\ x \longmapsto e^{2i\pi x} \end{array}$$

1 - a. Cette application est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Injectivité : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) = e^{2i\pi(x+1)} = e^{(2i\pi x + 2i\pi)} = e^{2i\pi x} = f(x)$.
Cette fonction n'est donc pas injective.
Surjectivité : Soit $z \in \mathbb{T}$. Le complexe z est de module 1 et s'écrit donc sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. On a donc $z = f(x)$ avec $x = \theta/2\pi$. L'application f est donc surjective (tout élément de $\mathbb{T}$ admet un antécédent).

b. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{1\}) &= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 1\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}\ ,\ e^{2i\pi x} = 1\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ 2\pi x = 2\pi k\, , k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2 - On note p l'application :

$$p : \begin{array}{l} \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R} \\ z \longmapsto Re(z) \end{array}$$

et on pose $g = p \text{ o } f$.

a. Déterminer $g(\mathbb{R})$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. on a $g(x) = p$ o $f(x) = p(f(x)) = p(e^{2i\pi x}) = Re(e^{2i\pi x}) = \cos(2\pi x)$.
On en déduit : $g(\mathbb{R}) = \{\cos(2\pi x)\ ,\ x \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$.

b. Déterminer deux ensembles I et J tels que l'application

$$\begin{aligned} \tilde{g} :\ & I \longrightarrow J \\ & x \longmapsto g(x) \end{aligned}$$

soit bijective.

On peut prendre $I = [0, 1/4]$ et $J = [0, 1]$: l'application

$$\begin{array}{rcl} \tilde{g} : [0, 1/4] & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & \cos(2\pi x) \end{array}$$

est bijective.

3 - (facultatif) Reprendre la question 1 avec $f_{|[0,1[}$.

Injectivité : Soient $x, y \in [0, 1[$ tels que $f_{|[0,1[}(x) = f_{|[0,1[}(y)$. On a $e^{2i\pi x} = e^{2i\pi y}$, c'est à dire $e^{2i\pi(x-y)} = 1$. On en tire $x = y + k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. On déduit de $x, y \in [0, 1[$ que $k = 0$ et donc $x = y$.
Surjectivité : Se déduit du cas précédent, en notant que $x = \theta/2\pi \in [0, 1[$.

<u>**Exercice 4 :**</u> On considère les applications :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\setminus\{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{C}\setminus\{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 1 - \dfrac{2i}{z+i} \end{array}$$

1 - Montrer que $f = g$.

f et g ayant les mêmes espaces de départ et d'arrivée, il s'agit d'établir que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$, c'est à dire :

$$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}\ ,\ \frac{z-i}{z+i} = 1 - \frac{2i}{z+i}.$$

Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$. On a : $1 - \dfrac{2i}{z+i} = \dfrac{z+i}{z+i} - \dfrac{2i}{z+i} = \dfrac{z-i}{z+i}$

2 - En déduire que $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.

On rappelle que : $f^{-1}(\{1\}) = \{z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}\ ,\ f(z) = 1\}$.
Il s'agit donc d'établir que l'équation $f(z) = 1$ (ou de manière équivalente $g(z) = 1$) n'admet pas de solution sur $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$.

Soit z $\in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$: $g(z) = 1 \quad \Leftrightarrow 1 - \dfrac{2i}{z+i} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{2i}{z+i} = 0$$

Cette équation n'admet pas de solution sur $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$. On en déduit $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.

3 - On note h l'application :

$$\begin{array}{rcl} h:\mathbb{C}\backslash\{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\backslash\{1\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$$

Montrer que h est bijective.
4 - Déterminer une expression de la fonction réciproque de h.

Réponse aux questions **3 -** et **4 -**

Surjectivité : Soit $z^{'} \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$.

On cherche $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$ tel que $z^{'} = h(z)$, c'est à dire $\dfrac{z-i}{z+i} = z^{'}$.

$$\begin{aligned} \frac{z-i}{z+i} = z^{'} \quad & \Leftrightarrow z - i = z^{'}(z+i) \\ & \Leftrightarrow z(1-z^{'}) = i(z^{'}+1) \\ & \Leftrightarrow z = \frac{i(z^{'}+1)}{(1-z^{'})} \quad (z^{'} \neq 1) \end{aligned}$$

Ce résultat est une équivalence : pour tout $z^{'} \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, il existe un et un seul antécédent, donné par la formule : $z = \dfrac{i(z^{'}+1)}{(1-z^{'})}$. On déduit de ceci que h est bijective et que sa réciproque est :

$$\begin{array}{rcl} h^{-1}:\mathbb{C}\backslash\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\backslash\{-i\} \\ z^{'} & \longmapsto & \dfrac{i(z^{'}+1)}{(1-z^{'})} \end{array}$$

<u>Exercice 5 :</u> *Déterminer si les assertions suivantes sont vraies (**V**) ou fausses (**F**). On ne demande pas de justifier vos réponses.* ***Attention :*** *0.5 par bonne réponse ; -0.25 par réponse erronée.*

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (non(Q) \Rightarrow non(P))$	**V**
$\Big(P \Rightarrow (Q \text{ et } R)\Big) \Leftrightarrow \Big(non\big(P \text{ et } (non(Q) \text{ ou } non(R))\big)\Big)$	**V**
$f: \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \Rightarrow Im(f) = \mathbb{R}_+$	**F**
$\begin{array}{rcl} f:[-2,4] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \sin^2(x) \end{array} \Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = \{-\pi/2, \pi/2\}$	**V**
Soit $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si f et g sont bijectives, alors $f \text{ o } g = g \text{ o } f$	**F**
Soit $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si f est injective et g est surjective, alors $f \text{ o } g$ est bijective	**F**