Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2016-2017

Mathématiques III PMI — 26 septembre 2016. Durée : 1 h 30

Devoir n° 1. Corrigé ANALYSE

Partie Analyse

Exercice 3.

1. Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t$.
2. (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f(x) = \sqrt{1+3x+2x^2} - 1$;

   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X^2+3X+2} - X$;

   (c) Déterminer la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{y^2+3y+2}-y}{y\ln(2+y^3)}\mathrm{d}y$.

Corrigé.

1. La fonction sous l'intégrale est continue sur $]0,\infty[$ mais elle n'est pas continue en 0 - les deux bornes sont impropres. On separe les deux bornes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+\sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^{1} \frac{1+\sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1+\sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t$$

   La fonction est à valeurs positives. On remarque que $|\sin t| \leq 1$ et alors $1+\sin t \leq 2$.

   En 0 :

$$\frac{1+\sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} \leq \frac{2}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} \sim_0 2t^{-2/3}$$

   L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{-2/3}\mathrm{d}t$ est convergente ($2/3 < 1$ dans l'intégrale de Riemann en 0).

   En $+\infty$:

$$\frac{1+\sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} \leq \frac{2}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} \sim_0 2t^{-5/3}$$

   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-5/3}\mathrm{d}t$ est convergente ($5/3 > 1$ dans l'intégrale de Riemann à l'infini).

   On conclut que la somme $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1+\sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1+\sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}}\mathrm{d}t$ converge.

2. (a) On utilise le DL de $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$:

$$f(x) = \sqrt{1+3x+2x^2} - 1 = 1 + \frac{3}{2}x + x^2 - \frac{9x^2}{8} + o(x^2) - 1 = \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

   (b)

$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X^2+3X+2} - X = \lim_{X\to+\infty} X\left(\sqrt{1+3\frac{1}{X}+2\frac{1}{X^2}} - 1\right) = \lim_{X\to+\infty} X\left(\frac{3}{2}\frac{1}{X} + o(\frac{1}{X})\right) = \frac{3}{2};$$

   où on utilise la question (a) en posant $x = \frac{1}{X}$.

   (c) La nature de cette intégrale impropre est définie par le comportement de $\dfrac{\sqrt{y^2+3y+2}-y}{y\ln(2+y^3)}$ à l'infini, la fonction étant continue sur le domain d'intégration. Le numerateur tend vers $\dfrac{3}{2}$, un nombre fini. La nature de l'intégrale est définie par son denominateur : $y\ln(2+y^3) \sim_{+\infty} 3y\ln y$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y$ est une intégrale de Bertrand qui diverge.

Exercice 4.

1. Déterminer la nature de l'intégrale : $int_1^{+\infty} \dfrac{\cos u}{\sqrt{u}} du$. en utilisant une intégration par partie.
2. On veut déterminer si la fonction définie par $\forall x \in [1, +\infty[, \quad g(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ est intégrable.
   (a) Montrer que $|\cos t| \geq \cos^2 t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer si l'intégrale suivante est convergente : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.
   (c) Montrer que la fonction g n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Corrigé

1. Pour l'intégration par partie - c'est $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ qu'on va dériver car cela donnera une intégrale comparable avec l'intégrale de Riemann convergente. On a

$$U = \sin u,\ U' = \cos u;\ V = \frac{1}{\sqrt{u}},\ V' = -\frac{1}{2u^{3/2}}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \lim_{A\to\infty} \left[\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right]_1^A + \int_1^{\infty} \frac{\sin u}{2u^{3/2}} du.$$

Ici $\lim_{A\to\infty} \left[\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right]_1^A = -\sin 1$. Comme

$$\left|\frac{\sin u}{2u^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{2u^{3/2}}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_1^{\infty} \left|\frac{\sin u}{2u^{3/2}}\right| du \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{2u^{3/2}} du.$$

qui est à l'infini l'intégrale convergeante de Riemann (la puissance $3/2 > 1$). On conclue que l'intégrale est convergente.

2. (a) On a $1 \geq |\cos t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si on multiplie cette inégalité de deux coté par un nombre positif $|\cos t|$ on obtient $|\cos t| \geq \cos^2 t$.
   (b) Par le changement de variables $s = 2t$ on est ammené à l'intégrale de 4.1 donc l'intégrale est bien convergente :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^{+\infty} \frac{\cos(s)}{\sqrt{s}} \mathrm{d}s.$$

   (c) En effet, on utilise $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$ ou plutôt $\cos 2t = -1 + 2\cos^2 t$ pour avoir

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t + 2\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

   Puisque l'intégrale $-\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ diverge (Riemann à l'infini avec $1/2 < 1$) cela implique que $2\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ diverge aussi car leur somme donne l'intégrale convergente comme on a montré dans 4.2(b). Par comparaison de 4.2(a) on conclut que la fonction $g(x)$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.