

**Devoir n° 1. Corrigé ANALYSE**

**Partie Analyse**

**Exercice 3.**

1. Déterminer la nature de l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} \frac{1 + \sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} dt$ .
2. (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction  $f(x) = \sqrt{1 + 3x + 2x^2} - 1$ ;  
 (b) Calculer  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X^2 + 3X + 2} - X$ ;  
 (c) Déterminer la nature de l'intégrale impropre  $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{y^2 + 3y + 2} - y}{y \ln(2 + y^3)} dy$ .

Corrigé.

1. La fonction sous l'intégrale est continue sur  $]0, \infty[$  mais elle n'est pas continue en 0 - les deux bornes sont impropres. On separe les deux bornes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 + \sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} dt = \int_0^1 \frac{1 + \sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1 + \sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} dt$$

La fonction est à valeurs positives. On remarque que  $|\sin t| \leq 1$  et alors  $1 + \sin t \leq 2$ .

En 0 :

$$\frac{1 + \sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} \leq \frac{2}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} \sim_0 2t^{-2/3}$$

L'intégrale  $\int_0^1 t^{-2/3} dt$  est convergente ( $2/3 < 1$  dans l'intégrale de Riemann en 0 ).

En  $+\infty$  :

$$\frac{1 + \sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} \leq \frac{2}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} \sim_0 2t^{-5/3}$$

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} t^{-5/3} dt$  est convergente ( $5/3 > 1$  dans l'intégrale de Riemann à l'infini).

On conclut que la somme  $\int_0^1 \frac{1 + \sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1 + \sin t}{(t+1)\sqrt[3]{t^2}} dt$  converge.

2. (a) On utilise le DL de  $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$  :

$$f(x) = \sqrt{1 + 3x + 2x^2} - 1 = 1 + \frac{3}{2}x + x^2 - \frac{9x^2}{8} + o(x^2) - 1 = \frac{3}{2}x - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

(b)

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X^2 + 3X + 2} - X = \lim_{X \rightarrow +\infty} X \left( \sqrt{1 + 3\frac{1}{X} + 2\frac{1}{X^2}} - 1 \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} X \left( \frac{3}{2} \frac{1}{X} + o\left(\frac{1}{X}\right) \right) = \frac{3}{2};$$

où on utilise la question (a) en posant  $x = \frac{1}{X}$ .

- (c) La nature de cette intégrale impropre est définie par le comportement de  $\frac{\sqrt{y^2 + 3y + 2} - y}{y \ln(2 + y^3)}$  à l'infini, la fonction étant continue sur le domain d'intégration. Le numerateur tend vers  $\frac{3}{2}$ , un nombre fini. La nature de l'intégrale est définie par son denominateur :  $y \ln(2 + y^3) \sim_{+\infty} 3y \ln y$ . L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{y \ln y} dy$  est une intégrale de Bertrand qui diverge.

#### Exercice 4.

- Déterminer la nature de l'intégrale :  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$ . en utilisant une intégration par partie.
- On veut déterminer si la fonction définie par  $\forall x \in [1, +\infty[$ ,  $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$  est intégrable.
  - Montrer que  $|\cos t| \geq \cos^2 t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
  - Déterminer si l'intégrale suivante est convergente :  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{t}} dt$ .
  - Montrer que la fonction  $g$  n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$ .

#### Corrigé

- Pour l'intégration par partie - c'est  $\frac{1}{\sqrt{u}}$  qu'on va dériver car cela donnera une intégrale comparable avec l'intégrale de Riemann convergente. On a

$$U = \sin u, U' = \cos u; V = \frac{1}{\sqrt{u}}, V' = -\frac{1}{2u^{3/2}}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin u}{\sqrt{u}} \right]_1^A + \int_1^{\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u^3/2}} du.$$

Ici  $\lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin u}{\sqrt{u}} \right]_1^A = \sin 1$ . Comme

$$\left| \frac{\sin u}{2\sqrt{u^3/2}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{u^3/2}}$$

pour tout  $u \in \mathbb{R}$  on a

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin u}{2\sqrt{u^3/2}} \right| du \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{u^3/2}} du.$$

qui est à l'infini l'intégrale convergente de Riemann (la puissance  $3/2 > 1$ ). On conclue que l'intégrale est convergente.

- On a  $1 \geq |\cos t|$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Si on multiplie cette inégalité de deux coté par un nombre positif  $|\cos t|$  on obtient  $|\cos t| \geq \cos^2 t$ .
  - Par le changement de variables  $s = 2t$  on est ammené à l'intégrale de 4.1 donc l'intégrale est bien convergente :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^{+\infty} \frac{\cos(s)}{\sqrt{s}} ds.$$

- En effet, on utilise  $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$  ou plutôt  $\cos 2t = -1 + \cos^2 t$  pour avoir

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{\sqrt{t}} dt = - \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{t}} dt.$$

Puisque l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$  diverge (Riemann à l'infini avec  $1/2 < 1$ ) cela implique que  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{t}} dt$  diverge aussi car leur somme donne l'intégrale conergente comme on a montré dans 4.2(b). Par comparaison de 4.2(a) on conclut que la fonction  $g(x)$  n'est pas intégrable sur  $[1, +\infty[$ .