Fondamentaux des Mathématiques – DS n° 1

Partie commune

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1.

1. – Factoriser les polynômes x^2+5x+6 et x^2+x-6.
   – Trouver l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient
   $$\frac{2x+3}{x^2+5x+6} \geq \frac{x}{x^2+x-6}.$$
2. – Prouver que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a l'inégalité $x^2+xy+y^2 \geq 0$.
   – On considère le polynôme $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 8x$. Trouver deux nombres réels b et c tels que $P(x) = x\,(x-2)\,(x^2+bx+c)$.
   – Trouver l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels qu'on ait $P(x) \leq 0$.
3. Prouver que, pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on a l'inégalité suivante :
   $$(ab+cd)^2 \leq (a^2+c^2)\,(b^2+d^2).$$
   Utiliser ce résultat pour prouver, par récurrence (et donc d'une façon différente de celle vue en TD), l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $(x_1 \dots x_n)$ et $(y_1 \dots y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a
   $$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n}(y_j)^2\right)^{1/2}.$$

Exercice 2.

Soient $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux nombres naturels.
Dans une salle on a m tables ; n enfants doivent entrer dans la salle et se disposer autour d'une table. Plusieurs enfants peuvent être autour de la même table.

(Q1) Calculer le nombre de façons possibles dans lesquelles les enfants peuvent se disposer.

Maintenant, on donne la règle que, autour d'une table, on ne peut pas avoir plus qu'un seul enfant.

(Q2) Donner une condition nécessaire reliant n et m, pour que ça soit possible.
(Q3) Sous cette condition, calculer le nombre de dispositions possibles.

Exercice 3.

1. – Donner la forme algébrique du nombre complexe z défini par
$$z = \frac{5-i}{2-3i}\,.$$
   – Calculer son conjugué, son module et un de ses arguments.
   – Calculer les deux racines carrées de z par deux méthodes, celle algébrique et celle trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Trouver l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que
$$\frac{iz-1}{z-i}$$
   soit un nombre imaginaire pur.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 13 = 0$.

Exercice 4.

1. Soit $w = (\sqrt{3}/2) + (1/2)i$. Calculer son module et en déduire que $1/w = \overline{w}$.
2. Calculer la quantité $(w + \overline{w})^2$. En déduire que w est une solution de l'équation $z^4 - z^2 + 1 = 0$. Trouver une autre solution de cette équation.
3. Prouver que toute solution de l'équation $z^4 - z^2 + 1 = 0$ vérifie $z^6 = -1$.