Correction du devoir n° 5
PARTIE COMMUNE

Exercice 1. Dans un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, soient A, B et C trois points distincts entre eux et de O d'affixes a, b et c.

1. On note $j = e^{2i\pi/3}$. Déterminer le module et l'argument de $-j^2$ et calculer $1 + j + j^2$.
2. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$. Soit M un point et soit z son affixe.
   (a) Déterminer l'affixe z' de $M' = R(M)$.
   (b) Que peut-on dire du triangle OMM' ?
   Soient $A' = R(A)$, $B' = R(B)$ et $C' = R(C)$. On note leurs affixes a', b' et c'.
3. Soient U, V et W les milieux respectifs des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.
   (a) Calculer les affixes u, v et w de U, V et W en fonction de a, b, c et j.
   (b) Démontrer que le triangle UVW est équilatéral.

1. (a) On a : $-j^2 = e^{i\pi}\left(e^{2i\pi/3}\right)^2 = e^{i(\pi+4\pi/3)} = e^{i\pi/3} = e^{i\pi/3}$, d'où $|-j^2| = 1$ et $\arg(-j^2) = \pi/3$. On a par ailleurs : $1+j+j^2 = (1-j^3)/(1-j) = 0$ (ou bien : $1+j+j^2 = 1+\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = 0$).

   (b) Comme $M \neq O$, on a : $z \neq 0$. Par définition d'une rotation, on a :

$$\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg \dfrac{z'}{z} \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]. \end{cases}$$

   On en déduit que z'/z a pour module 1 et pour argument $\pi/3$. Autrement dit :

$$\frac{z'}{z} = e^{i\pi/3}, \quad \text{soit } z' = e^{i\pi/3}z.$$

   NB : On sait que $e^{i\pi/3} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et on peut remarquer que $e^{i\pi/3} = -j^2$, où $j = e^{2i\pi/3}$.

   (c) Le triangle OMM' est isocèle de sommet principal O (car $OM = OM'$) et l'angle en O vaut $\pi/3$ donc il est équilatéral.
   NB : On peut le vérifier en complexes :

$$MM' = |z - z'| = \left|z - e^{i\pi/3}z\right| = \left|1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right||z| = \left|\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right||z| = |z| = OM = OM',$$

   ou (en factorisant l'arc-moitié... et en sachant que $\sin(\pi/6) = 1/2$) :

$$\left|1 - e^{i\pi/3}\right| = \left|e^{i\pi/6}\left(e^{-i\pi/6} - e^{i\pi/6}\right)\right| = \left|e^{i\pi/6}\right| \cdot \left|-2i\sin\frac{\pi}{6}\right| = 1.$$

2. (a) On a : $a' = e^{i\pi/3}a$, $b' = e^{i\pi/3}b$ et $c' = e^{i\pi/3}c$. Par conséquent :

$$u = \frac{a'+b}{2} = \frac{e^{i\pi/3}}{2}\,a + \frac{1}{2}\,b\,; \quad v = \frac{b'+c}{2} = \frac{e^{i\pi/3}}{2}\,b + \frac{1}{2}\,c\,; \quad w = \frac{c'+a}{2} = \frac{e^{i\pi/3}}{2}\,b + \frac{1}{2}\,a,$$

   ce qu'on récrit :

$$u = -\frac{j^2}{2}a + \frac{1}{2}b\,; \quad v = -\frac{j^2}{2}b + \frac{1}{2}c\,; \quad w = -\frac{j^2}{2}c + \frac{1}{2}a.$$

   (b) On va comparer $v - u$ et $w - u$ (en utilisant $1 + j + j^2 = 0$) :

$$v - u = \frac{j^2}{2}a + \frac{-1-j^2}{2}b + \frac{1}{2}c = \frac{j^2}{2}a + \frac{j}{2}b + \frac{1}{2}c\,;$$
$$w - u = \frac{1+j^2}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{j^2}{2}c = -\frac{j}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{j^2}{2}c.$$

   On observe que $-j(w-u) = v - u$, de sorte que

$$UW = |w-u| = |v-u| = UV \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{UW}, \overrightarrow{UV}) \equiv \arg\frac{v-u}{w-u} \equiv \arg(-j) \equiv \pi + \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{-\pi}{3}\ [2\pi].$$

   Le triangle UVW est bien équilatéral.

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbf{Z}$ l'équation (E_0) : $7x \equiv 0$ [30].
2. Expliciter un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que : $7u + 30v = 1$.
3. Expliciter un entier relatif x_1 qui soit solution de l'équation (E_1) : $7x \equiv 1$ [30].
4. Pour $b \in \mathbf{Z}$, on note (E_b) l'équation d'inconnue entière : $7x \equiv b$ [30].
   (a) Montrer que l'équation (E_b) a au moins une solution dans $\mathbf{Z}$.
   (b) Montrer que l'équation (E_b) a une et une seule solution dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 28, 29\}$.
   (c) `Vrai ou faux?` Pour tout $b \in \mathbf{Z}$, l'équation (E_b) a une et une seule solution dans $\{13, 14, 15, \ldots, 41, 42\}$.

1. Soit x un entier. La congruence $7x \equiv 0$ [30] signifie que 30 divise $7x$. Or, 30 et 7 sont premiers entre eux car 7 est premier et il ne divise pas 30. Par le lemme de Gauss, si 30 divise $7x$, alors 30 divise x ; autrement dit, il existe k entier tel que $x = 30k$. Réciproquement, si $x = 30k$, alors $7x = 210k$ est bien divisible par 30. L'ensemble des solutions de (E_0) est donc $\{30k,\ k \in \mathbf{Z}\}$.
2. *Première solution :* On utilise l'algorithme d'Euclide à partir de $a = 7$ et $b = 30$:

$$\begin{aligned} 7 &= 0 \times 30 + 7\,; & & \\ 30 &= 4 \times 7 + 2\ : & b &= 4a + 2\,; \\ 7 &= 3 \times 2 + 1\ : & a &= 3 \times 2 + 1 = 3(b - 4a) + 1, \end{aligned}$$

   d'où $13a - 3b = 1$, ce qui signifie que le couple $(u, v) = (13, -3)$ est une solution particulière.

   Deuxième solution (« à vue ») : On parcourt les multiples de 30 jusqu'à trouver un multiple de 7 à distance 1. On voit que 30 et 60 ne conviennent pas (7 ne divise pas 29, 31, 59, 61) mais 90 oui : $91 = 70 + 21 = 7 \times 13$ donc $7 \times 13 - 3 \times 30 = 1$. On peut prendre $(u, v) = (13, -3)$.
3. Soit $x \in \mathbf{Z}$. La congruence $7x \equiv 1$ [30] équivaut à l'existence de y entier tel que $7x = 1 + 30y$. On vient de voir que $(x, y) = (u, -v) = (13, 3)$ est solution de cette équation : prenons donc $x_1 = u = 13$, on a : $7x_1 \equiv 91 \equiv 1$ [30].
4. (a) Par compatibilité des congruences avec le produit, on a : $b \times 7x_1 \equiv b \times 1 \equiv b$ [30] donc $bx_1 = 13b$ est une solution de (E_b).

   (b) Notons $x_b = 13b$. Soit x un entier. Alors, d'après la question **??** :

$$7x \equiv b\ [30] \iff 7x \equiv 7x_b\ [30] \iff 7(x - x_b) \equiv 0\ [30] \iff \exists k \in \mathbf{Z},\ x - x_b = 30k.$$

   Le reste r de la division euclidienne de $x_b = 13b$ par 30 convient : il appartient à l'ensemble prescrit et $r \equiv x_b$ modulo 30. Si r' convient aussi, $r - r' \equiv x_b - x_b \equiv 0$ [30] ; de plus, $-29 \leq r - r' \leq 29$. Comme le seul multiple de 30 dans $\{-29, \ldots, 29\}$ est 0, on a donc : $r' = 0$.

   Variante. Parmi les couples d'entiers (q, x) tels que $x_b = 30q + x$, il y en a un et un seul tel que $0 \leq x < 30$, c'est celui donné par la division euclidienne. Il y a donc une et une seule solution x de (E_b) dans $\{0, 1, \ldots, 29\}$.

   (c) C'est vrai. Prouvons d'abord l'existence. Soit r le reste de $13b$ par 30 : c'est une solution de (E_b) dans $\{0, \ldots, 29\}$ (*cf.* question **??**). Deux cas se présente : si $r \geq 13$, alors r est une solution de (E_b) dans $\{13, \ldots, 29\}$. Sinon, $r + 30$ est une solution de (E_b) et appartient à $\{30, \ldots, 42\}$ (car $0 \leq r \leq 12$).

   Supposons que r et r' conviennent. Des inégalités $13 \leq r \leq 42$ et $-42 \leq -r' \leq -13$ on déduit que $-29 \leq r - r' \leq 29$. De plus, $r - r'$ est divisible par 30 (question **??**) donc $r - r' = 0$. Cela prouve l'unicité de la solution de (E_b) dans $\{13, 14, \ldots, 42\}$.

Exercice 3. `Étude d'une suite récurrente` Soit la fonction $f : \mathbf{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longmapsto \dfrac{5x-3}{x+1}$.

1. Calculer les limites de f au bord du domaine de définition, c'est-à-dire en $-\infty$, $(-1)^-$, $(-1)^+$ et $+\infty$. Calculer la dérivée de f sur son ensemble de définition, donner son tableau de variations et faire un graphe sommaire de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$, pour $x > -1$, admet deux solutions α et β avec $\alpha > \beta$.
3. Montrer que $f([\beta, \alpha]) \subset [\beta, \alpha]$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ donnée par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geq 1$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.
4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
5. En déduire une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et montrer qu'elle converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

1. En mettant x en facteur au dénominateur et au numérateur on trouve que pour tout $x \notin \{0, -1\}$, $f(x) = \frac{5-3/x}{1+1/x}$. Ainsi on a
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 5.$$
Pour tout $x < -1$ on a $x + 1 < 0$ et donc $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$ car le dénominateur est alors négatif. De la même manière, on a $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$.
La fonction f est une fraction rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition. Ainsi, pour tout $x \neq -1$, $f'(x) = \frac{8}{(x+1)^2}$.
2. Pour tout $x > -1$, l'équation $f(x) = x$ s'écrit $\frac{5x-3}{x+1} = x$. Puisque $x + 1 \neq 0$, l'équation est équivalente à $x^2 - 4x - 3 = 0$. Ce trinôme admet deux solutions $\alpha = 3$ et $\beta = 1$.
3. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[\beta, \alpha]$ ainsi $f\big([\beta, \alpha]\big) = [f(\beta), f(\alpha)] = [\beta, \alpha]$.
Montrons par récurrence que la suite $(u_n)_{n\geq0}$ est bien définie. Posons pour tout $n \geq 0$,
$$H_n : u_n \in [\beta, \alpha].$$
Pour $n = 0$, H_0 est vérifiée car $u_0 = 2$. Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons H_n et montrons H_{n+1}. Puisque $u_n \in [\beta, \alpha]$, alors par ce qui précède, $u_{n+1} = f(u_n) \in [\beta, \alpha]$. Ainsi H_{n+1} est vérifiée, ce qui achève la récurrence.
On a montré que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [\beta, \alpha]$.
4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 1} \times \frac{u_n - 1}{u_n - 3} = \frac{\frac{5u_n-3}{u_n+1} - 3}{\frac{5u_n-3}{u_n+1} - 1} \times \frac{u_n - 1}{u_n - 3} = \frac{2u_n - 6}{4u_n - 4} \times \frac{u_n - 1}{u_n - 3} = \frac{1}{2}$$
Donc la suite $(v_n)_{n\geq0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
5. Par une récurrence immédiate on a que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
$$v_n = \frac{1}{2^n} v_0 = -\frac{1}{2^n}.$$
Ainsi pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{u_n-1}{u_n-3} = -\frac{1}{2^n}$ et donc
$$u_n = \frac{\frac{1}{2^n} + 3}{\frac{1}{2^n} + 1}.$$
Puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 4. `Vrai ou faux ?` Pour chacune des propositions entre guillemets, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. « L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - 2\dfrac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$ est
$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{llll} y : &]0, +\infty[& \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \lambda x^2 + x^4 \end{array}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}. »$$
2. « La fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par
$$x \mapsto \sin\big(\sqrt{x^2+1}\big) + \ln(x^2+1)$$
est une primitive de la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par
$$x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}\cos(\sqrt{x^2+1}) + 2x}{x^2+1}. »$$

3. « La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \sin(12n+4)\frac{(3n+5)^2}{n^3+1/n+1}$$

est convergente. »

1. FAUX ! En effet, par exemple si $\lambda = 0$, la fonction

$$\begin{array}{rccc} y: &]0,+\infty[& \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & x^4 \end{array}$$

vérifie pour tout $x > 0$, $y'(x) - 2\frac{y(x)}{x} = x^3$. Or par exemple pour $x = 2$ on a $x^3 \neq x^2$. La fonction y n'est donc pas une solution de l'équation différentielle.

2. Encore FAUX ! Notons F la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$x \mapsto \sin\big(\sqrt{x^2+1}\big) + \ln\big(x^2+1\big).$$

La fonction F est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$F'(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}\cos(\sqrt{x^2+1}) + 2x}{x^2+1}.$$

En $x = 0$ on s'aperçoit que que $F'(0) = 0$ or ce n'est pas le cas pour la fonction proposée.

3. VRAI ! Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$|u_n| \leq \frac{(3n+5)^2}{n^3} = \frac{(3+5/n)^2}{n}.$$

Par le théorème des gendarmes, la suite (u_n) converge et de plus $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.