Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016

Math III - PMI Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle**.

Les exercices sont indépendants.

Partie Analyse

Exercice 1.

On étudie l'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 1) < 0\}$.

1. Esquisser U.
2. Donner la définition d'un compact dans un espace quelconque.
   Expliciter un exemple d'une suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$, convergente vers un point qui n'appartient pas à U. Montrer que l'ensemble U n'est pas un compact.
3. Donner la définition d'un ouvert et expliquer pourquoi U est un ouvert.

Exercice 2.

1. Etudier l'existence de la limite suivante et la calculer si elle existe
$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,b)} \frac{\sin(xy)}{x} \quad \text{où } b \in \mathbb{R}.$$
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x, y) = \frac{1 - e^{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$
   Est-ce que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$?
3. On considère la fonction $g(x, y) = \dfrac{x + 2y - 5}{x + y - 3}$ au voisinage du point $(1, 2)$.
   Montrer que la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} g(x, y)$ n'existe pas.

Partie Algèbre

Exercice 3. (Questions de cours)
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit P un polynôme à coefficients réels et soit x un vecteur propre de f. Montrer que x est également un vecteur propre de $P(f)$.
2. Énoncer le "lemme des noyaux". (On ne demande pas de le démontrer).

Exercice 4. On note A la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A dans la base canonique.

1. Calculer le polynôme caractéristique de u et l'espace propre E_2 associé à u pour la valeur propre 2.
2. Montrer que u n'est pas diagonalisable.
3. Justifier que u est trigonalisable sans effectuer la trigonalisation.
4. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure, et expliciter cette matrice.
5. Soit (f_1, f_2, f_3) une base de E dans laquelle la matrice T de u est triangulaire supérieure.
   (a) Quelle est la diagonale de T ?
   (b) Montrer que $f_1 \in E_2 \setminus \{0\}$.
   (c) Montrer que $f_2 \notin E_2$.
   (d) Montrer que $f_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})^2$.
   (e) Montrer que $f_3 \notin \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})^2$.
6. L'objectif de cette question est de prouver l'énoncé réciproque des résultats accumulés à la question précédente.
   Soit (g_1, g_2, g_3) un triplet de vecteurs de E. On suppose que $g_1 \in E_2 \setminus \{0\}$, $g_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})^2 \setminus E_2$ et $g_3 \notin \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})^2$.
   (a) Montrer que (g_1, g_2, g_3) est une base de E.
   (b) Montrer que la matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure.