Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2015-2016

Math I - CPGEI

Devoir n° 2

PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. `Dérivées successives`

1. Soit $a \in \mathbf{R}$ et la fonction g,
$$\begin{aligned} g : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \mathrm{ch}(ax). \end{aligned}$$
On suppose g infiniment dérivable sur $\mathbf{R}$.
   (a) Calculer g', g'' ainsi que $g^{(3)}$.
   (b) Calculer, pour tout $n \geq 1$, $g^{(n)}$.
2. Soit la fonction f,
$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto xe^{-x}. \end{aligned}$$
On suppose f infiniment dérivable sur $\mathbf{R}$.
   (a) Calculer f', f'' ainsi que $f^{(3)}$.
   (b) Calculer, pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}$.

Exercice 2. Récurrence forte

1. Soit $q \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Rappeler la formule bien connue qui fournit une autre expression du réel
$$\sum_{k=0}^{n} q^k.$$
(On ne demande pas d'en rappeler la démonstration).
2. Pour tout entier $n \geq 0$, on note : $u_n = 2^n$. En utilisant la formule rappelée au 1), vérifier que pour tout entier $n \geq 0$:
$$\left(1 + \sum_{k=0}^{n} u_k\right)^2 = 1 + 3\sum_{k=0}^{n} u_k^2.$$

3. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels dans $\mathbf{R}^{+*}$.

   On suppose que pour chaque $n \geq 0$ l'identité suivante :

$$(E_n) \qquad \left(1+\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2 = 1+3\sum_{k=0}^{n} x_k^2$$

   est vérifiée.

   (a) Écrire explicitement l'identité (E_0) et en déduire la valeur de x_0.

   (b) Écrire explicitement l'identité (E_1) et en déduire la valeur de x_1.

   (c) En utilisant une récurrence "forte", montrer que pour tout $n \geq 0$, $x_n = 2^n$.

Exercice 3. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto x^2 - x - 2. \end{aligned}$$

1. Donner l'ensemble $\{x \in \mathbf{R},\ f(x) = 0\}$ et calculer $f(\mathbf{R})$ que l'on notera I.
2. Montrer que f restreinte à l'intervalle $[1/2, +\infty[$ est injective.
3. Soit maintenant la fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto e^{2x} - e^x - 2. \end{aligned}$$

   (a) Trouver l'ensemble $\{x \in \mathbf{R},\ h(x) = 0\}$, on pensera à poser $X = e^x$.

   (b) La fonction h est-elle injective, surjective ?

Exercice 4. `Vrai ou faux`

Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Pour tous ensembles A, B et C, si $A \cap B \cap C = \emptyset$, alors $A \cap B = \emptyset$ ou $A \cap C = \emptyset$ ou $B \cap C = \emptyset$.
2. Pour tous ensembles E et F et toute application f de E vers F, $f^{-1}(F) = E$.
3. Pour tout ensemble E et toute application g de E vers E, si $g \circ g \circ g = \mathrm{Id}_E$, alors g est bijective.
4. L'application f de $\mathbf{R}^2$ vers $\mathbf{R}^2$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (x + 3y, 2x + 5y)$$

   est une bijection.

5. Pour b réel, on note f_b l'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie pour tout t réel par $f_b(t) = t^2 + bt$. Il existe un b réel pour lequel f_b est injective.