1) Soit M une matrice réelle $(2,2)$ dont les coefficients sont notés comme suggéré par l'énoncé.

a) On calcule :

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix} \text{ et } NM = \begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ces deux matrices sont égales, alors $x = t$ et $z = 0$ et donc $M = xI + yN$. Réciproquement, s'il existe λ et μ tels que $M = \lambda I + \mu N$, alors $MN = NM = \lambda N + \mu N^2$.

b) On calcule :

$$ME = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \text{ et } EM = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ces deux matrices sont égales, alors $y = 0$ et $z = 0$ et donc $M = tI + (x-t)E$. Réciproquement, s'il existe λ et μ tels que $M = \lambda I + \mu E$, alors $ME = EM = \lambda E + \mu E^2$.

c) On calcule :

$$MQ = \begin{pmatrix} y & -x \\ t & -z \end{pmatrix} \text{ et } QM = \begin{pmatrix} -z & -t \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Si ces deux matrices sont égales, alors $x = t$ et $z = -y$ et donc $M = xI + zQ$. Réciproquement, s'il existe λ et μ tels que $M = \lambda I + \mu Q$, alors $MQ = QM = \lambda Q + \mu Q^2$. La réponse est donc “vrai”.

2) Soit M une matrice réelle $(2,2)$.

a) Comme suggéré, on constate que $A = J_a = N + aI$, donc que $MA = MN + aM$ tandis que $AM = NM + aM$. On en déduit aussitôt que $MA = AM \iff MN = NM$, équation qu'on a résolue au 1 a).

b) Cette fois, on commence par remarquer que $A = D_{a,d} = (a-d)E + dI$, donc que $MA = (a-d)ME + dM$ tandis que $AM = (a-d)EM + dM$. On en déduit que $MA = AM \iff (a-d)ME = (a-d)EM$, puis on simplifie par $a - d$ qui a été supposé non nul. On tombe alors sur l'équation qu'on a résolue au 1 b).

c) 0n constate que $MA = AM = aM$. On conclut donc que toutes les matrices sont solutions de (1). Mais toutes les matrices de la forme $\alpha I + \beta E$ sont diagonales, alors qu'il existe des matrices (donc des solutions de (1)) qui ne le sont pas - par exemple N. Il y a donc davantage de solutions de (1) que de matrices de la forme $\alpha I + \beta E$: la réponse est “faux”.

d) On remarque préalablement que $A = S_{r,\theta} = r(\sin\theta)Q + r(\cos\theta)I$, donc que $MA = r(\sin\theta)MQ + r(\cos\theta)M$ tandis que $AM = r(\sin\theta)QM + r(\cos\theta)M$. On en déduit que $MA = AM \iff r(\sin\theta)MQ = r(\sin\theta)QM$. Or les hypothèses sont fabriquées juste pour que $\sin\theta \neq 0$, et on peut donc simplifier par $r\sin\theta$ et on tombe alors sur l'équation qu'on a résolue au 1 c). La réponse est “vrai”.

3) Soit M une matrice réelle $(2,2)$ et supposons que $M^2 = A$. Alors $MA = M \times M^2 = M^3 = M^2 \times M = AM$.

4) a) Soit λ et μ deux réels. En remarquant que I et N commutent, on commence par écrire :

$$(\lambda I + \mu N)^2 = \lambda^2 I + 2\lambda\mu N + \mu N^2$$

puis on examine de près N^2 et on constate que $N^2 = 0$. On en conclut que :

$$(\lambda I + \mu N)^2 = \lambda^2 I + 2\lambda\mu N = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda\mu \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

(ce qu'on aurait obtenu probablement aussi vite par un calcul matriciel explicite, mais ç'aurait été moins distrayant).

On en déduit que :

$$(\lambda I + \mu N)^2 = A \iff (\lambda^2 = a \text{ et } 2\lambda\mu = 1) \iff (\lambda = \pm\sqrt{a} \text{ et } \mu = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}})$$

qui, à l'étape suivante, aboutit à la forme de solution suggérée par l'énoncé.
Dit autrement, l'équation (2) a exactement deux solutions qui sont de la forme $\lambda I + \mu N$, qui sont les deux matrices suggérées par l'énoncé.
Mais la question 3 nous apprend que toute solution de (2) est solution de (1) tandis que la question 2a) nous a appris que toute solution de (1) est de la forme $\lambda I + \mu N$. Quand on met tout ça bout à bout, on voit qu'on a trouvé toutes les solutions de (2).

b) Si on recommence selon le même plan en supposant $a < 0$ ça bloquera dès la résolution de $\lambda^2 = a$ qui n'a aucune solution ; si on démarre en supposant $a = 0$ on peut conclure que $\lambda = 0$ mais c'est alors l'équation $2\lambda\mu = 1$ qui n'a pas de solution. Dans les deux cas, on conclut que (E) est sans solution.

5) Il y a deux bêtises, une qui se révèle une simple imprudence, l'autre qui se révèle définitive. La première est d'avoir factorisé $M^2 - B^2$ sans justifier que M et B commutaient - on peut s'en tirer un peu acrobatiquement en remarquant que toute solution de (2) commute avec A et avec I et en exhibant des réels u et v tels que $B = uA + vI$. Mais à quoi bon ? La deuxième bêtise est irrémédiable : la nullité d'un produit de matrices n'entraîne en aucune façon la nullité de l'un au moins des facteurs, et ici ce n'est pas réparable.

6) Au vu du 3 et du 2b) rapprochés l'un de l'autre, on voit que toute solution de (2) est de la forme $\lambda I + \mu E$ donc est une matrice diagonale.
Pour résoudre (E) on peut donc se borner à la résoudre pour des inconnues diagonales. Soit x et t deux réels, l'équation :

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

équivaut au système de deux équations : $x^2 = a$ et $t^2 = d$. Le nombre de solutions de (2) est donc le même que le nombre de solutions de ce système qui est fort facile à compter :
* si $a < 0$ et $d < 0$, il n'y en a aucune ;
* si $a = d = 0$, il y en a une et une seule ;
* si $a = 0$ et $d > 0$, ou si $a > 0$ et $d = 0$, il y en a deux ;
* si $a > 0$ et $d > 0$, il y en a quatre.

7) a) Soit λ et μ deux réels. Même si on peut faire plus plan-plan, il est sans doute ingénieux de remarquer que le système proposé est équivalent à l'équation unique :

$$(\lambda + i\mu)^2 = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Mais on sait bien trouver les deux racines deuxièmes d'un complexe non nul fourni sous forme trigonométrique : ce sont les deux complexes $\pm\sqrt{r}e^{1\theta/2}$. En revenant aux parties réelle et imaginaire, le système a donc deux solutions, à savoir :

$$(\lambda, \mu) = \pm(\sqrt{r}\cos(\theta/2), \sqrt{r}\sin(\theta/2)).$$

b) Même chanson qu'au 4 : les solutions de (2) sont toutes solutions de (1) donc toutes de la forme $\lambda I + \mu Q$. Quand on explicite le carré $(\lambda I + \mu Q)^2$, son calcul aboutit à $(\lambda^2 - \mu^2)I + 2\lambda\mu Q$; si on le rapproche de la matrice A cela amène à poser un système qui, ô coïncidence frappante, est précisément celui traité au a). Et hop, en synthétisant on a à la fin deux solutions :

$$M = \pm\begin{pmatrix} \sqrt{r}\cos(\theta/2) & -\sqrt{r}\sin(\theta/2) \\ \sqrt{r}\sin(\theta/2) & \sqrt{r}\cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

8) a) Ce n'est pas très facile, et j'ai choisi de ne pas donner d'indications, parce qu'il y a plusieurs façons de faire dont aucune ne saute aux yeux. Celle qui m'a paru la plus naturelle est de voyager mentalement vers le modèle des applications linéaires et de réaliser que, parmi le petit nombre d'exemples qu'on connaît, les symétries par rapport à des droites ont pour carré (pour la composition) l'identité. Leurs matrices dans la base canonique ont donc pour carré I. Mais il existe manifestement une infinité de symétries différentes (au moins autant que d'axes de symétrie), donc une infinité de solutions pour (2). Une piste moins géométrique est de tâtonner un peu, au brouillon dans un premier temps ; voyons voir ce que ça donne :

$$\text{Pour } M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} x^2+yz & y(x+t) \\ z(x+t) & yz+t^2 \end{pmatrix}.$$

L'objectif est d'obtenir une matrice diagonale, en ayant en tête que l'énoncé n'exige pas qu'on fournisse toutes les solutions. Il est dès lors raisonnable de choisir x et t opposés, et pourquoi pas tiens x et t nuls. Si on fait ça, on aurra une solution dès qu'on choisit y et z inverses l'un de l'autre. Après tous ces tâtonnements, on a bien l'impression que toutes les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

pourraient bien être racines deuxièmes de I. On abandonne alors le brouillon et on revient à la copie où on écrit :

pour tout $b \in \mathbf{R}^*$, calculons $\begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}^2$. On constate trouver I. On a donc fourni une infinité de solutions de (2).

b) Là ce que j'avais en tête était de penser qu'on a plus haut calculé $N^2 = 0$ et qu'on en déduit que toutes les λN, λ réel sont solutions. Mais on peut bidouiller aussi avec des inconnues comme montré au a) et trouver une famille d'une infinité d'exemples de solutions.

c) Là je pensais aussi à une idée géométrique : la rotation d'un quart de tour a comme carré la symétrie de matrice $-I$. Il est moins évident d'en tirer une famille infinie d'exemples, une idée qui me vient en tête est de nommer e_1 le premier vecteur de la base canonique et f un vecteur variable non colinéaire à e_1 -de sorte que (e_1, f) est une base de $\mathbf{R}^2$. Si on définit un endomorphisme φ dans cette base par $\varphi(e_1) = f$, $\varphi(f) = -e_1$, il a pour carré $-\mathrm{Id}$. Sa matrice a donc pour carré $-I$. Mais il y a une infinité de tels endomorphismes (autant que de vecteurs f non colinéaires à e_1) donc une infinité de matrices solutions. Là encore il est possible de bidouiller au brouillon avec des lettres et trouver des solutions explicites.

d) En écrivant le sujet, je pensais me ramener aux trois cas précédents : pour tout $c > 0$, $(\sqrt{c}M)^2 = cM^2$ donc si M est une solution de $M^2 = I$, $M' = \sqrt{c}M$ est une solution de $M'^2 = cI$ et idem avec $-I$. Si on bidouille avec des inconnues au brouillon, on peut directement sortir de sa manche la famille infinie de solutions :

$$\begin{pmatrix} 0 & a/b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

dans laquelle le paramètre b varie. Et hop on a traité les quatre sous-questions d'un coup.