Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Math I

Problème n° 4

Problème CCP du 26 novembre 2014

Exercice 1. Calcul de primitive Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ fixé et x un nombre réel quelconque strictement positif. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on considère le nombre réel :

$$Z_n(x) = \frac{1}{n!} \int_1^x t^\alpha (\ln(t))^n dt.$$

1. Calculer $Z_0(x)$ et $Z_1(x)$.
2. Déterminer une relation de récurrence entre $Z_{n+1}(x)$ et $Z_n(x)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Montrer la formule suivante : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x > 0$,
$$Z_n(x) = \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - x^{\alpha+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k} \frac{(\ln(x))^k}{k!}$$
4. On note $\mathcal{N}_\alpha^n$ l'ensemble des fonctions définies sur $]0, +\infty[$, du type suivant
$$x \mapsto P(\ln(x))\ x^\alpha,$$
où P est une fonction polynomiale quelconque (à coefficients réels) de dedré au plus n.
Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{N}_\alpha^n$ admet une primitive dans l'ensemble $\mathcal{N}_{\alpha+1}^n$.

Exercice 2. On considère la fonction numérique f de variable réelle x définies sur $]0, \infty[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

1. Etudier les limites de f au bord du domaine de définition.
2. Etudier les variations de f (à résumer dans un tableau) et tracer la courbe représentative de f.
3. Pour tout $h \in]0, 1[$, calculer
$$\int_h^1 f(x)dx.$$
4. Calculer
$$\lim_{h \to 0} \int_h^1 f(x)dx$$
et donner une interpretation géométrique de cette limite.
5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un polynôme R_n tel que
$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = \frac{R_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}}.$$
Montrer que les polynômes R_n vérifient la relation suivante
$$R_{n+1}(x) = x^2 R_n'(x) + [1 - 2(n+1)x] R_n(x). \tag{1}$$

6. Calculer R_0, R_1, R_2, ainsi que R_3.
7. Calculer le degré, le coefficient dominant ainsi que le terme constant de R_n.
8. On considère la fonction, pour tout $x > 0$, $g(x) = x^2 f(x)$.
   Démontrer que pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}$ on a
   $$g^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x).$$
9. On rappelle la formule de Leibniz : soit $n \in \mathbf{N}$ et soit f_1 et f_2 deux fonctions définies sur un intervalle I et n fois dérivables I, alors $\forall x \in I$,
   $$(f_1 f_2)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f_1^{(k)}(x) f_2^{(n-k)}(x),$$
   où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
   Démontrer en utilisant la formule de Leibniz et la question précédente que pour tout $x > 0$,
   $$R_{n+1}(x) = (1 - 2(n+1)x)R_n(x) - n(n+1)x^2 R_{n-1}(x).$$
10. En déduire que pour tout $x > 0$,
   $$R_n'(x) = -n(n+1)R_{n-1}(x).$$
11. Enfin, en déduire de l'équation (1) et de la question précédente que pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}$,
   $$x^2 R_n''(x) + (1 - 2nx)R_n'(x) + n(n+1)R_n(x) = 0.$$