Correction du problème CCP du 26/11/2014

exercice 1 : 1) Si $n=0$, on a $\forall x>0$, $Z_0(x)=\int_1^x t^\alpha dt$.

Ainsi $\forall x>0$, $Z_0(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$.

De même, $\forall x>1$, $Z_1(x)=\int_1^x t^\alpha \ln t\, dt$. On effectue une intégration par parties.

$t^\alpha \leftarrow \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

$\ln t \rightarrow \dfrac{1}{t}$, $\forall x>0$, $Z_1(x)=\dfrac{1}{\alpha+1}\left[x^{\alpha+1}\ln x\right)-\int_1^x \dfrac{t^\alpha}{\alpha+1}dt$.

Donc $Z_1(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}\ln x}{\alpha+1}-\dfrac{t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}+\dfrac{1}{(\alpha+1)^2}$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$, $Z_{n+1}(x)=\dfrac{1}{(n+1)!}\int_1^x t^\alpha(\ln t)^{n+1}dx$.

On effectue une intégration par partie.

$\dfrac{(\ln t)^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow \dfrac{(\ln t)^n}{t.n!}$

$t^\alpha \leftarrow \dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Donc $\forall x>0$, $Z_{n+1}(x)=\dfrac{x^{\alpha+1}(\ln x)^{n+1}}{(\alpha+1)(n+1)!}-\dfrac{1}{\alpha+1}Z_n(x)$.

3). Démontrons cette formule par récurrence sur l'entier n.

Soit la proposition P_n, $n\in\mathbb{N}$

$$P_n : \forall x>0,\ Z_n(x)=\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1}-x^{\alpha+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{(\ln x)^k}{k!}\right)$$

Si $n=0$ $\quad P_0 : \forall x > 0,\ Z_0(x) = \frac{-1}{\alpha+1} - x^{\alpha+1}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)$,

$$Z_0(x) = \frac{1}{\alpha+1}\left(x^{\alpha+1} - 1\right)$$

Pour $n=0$, la proposition P_0 est vérifiée.

On suppose que P_n est vérifiée et on montre P_{n+1}.

D'après la question 2, on sait que

$$\forall x > 0,\ Z_{n+1}(x) = \frac{x^{\alpha+1}(\ln x)^{n+1}}{(\alpha+1)(n+1)!} - \frac{Z_n(x)}{\alpha+1}.$$

On applique l'hypothèse de récurrence. On a alors

$$\forall x > 0 \quad Z_{n+1}(x) = \frac{x^{\alpha+1}(\ln x)^{n+1}}{(\alpha+1)(n+1)!} - \frac{1}{\alpha+1}\left(\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1} - x^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{(\ln x)^k}{k!}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+2} - x^{\alpha+1}\left[-\frac{1}{\alpha+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+1-k}\frac{(\ln x)^k}{k!} - \frac{1}{\alpha+1}\frac{(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]$$

$$= \left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+2} - x^{\alpha+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{-1}{\alpha+1}\right)^{n+2-k}\frac{(\ln x)^k}{k!}\right).$$

On a donc démontré P_{n+1}, ce qui achève la récurrence.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vérifiée.

4) Soit $f \in \mathcal{U}_\alpha^n$, alors il existe un polynôme P de degré au plus n tq $\forall x > 0, f(x) = P(\ln(x))\, x^\alpha$.

Il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall x > 0, \quad f(x) = a_0 x^\alpha + a_1 \ln x\, x^\alpha + \dots + a_n (\ln x)^n x^\alpha.$$

Soit la fonction $F : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k Z_k(x)$$

par définition des fonction Z_k, $k=0,\dots,n$,
$\forall x>0$, $F'(x) = f(x)$. Donc F est une primitive de f.

Par ailleurs, d'après la question 3, $Z_k \in \mathcal{N}^n_{d+1}$ pour tout $k \in \{0,..,n\}$.

Donc $F \in \mathcal{N}^n_{d+1}$.

<u>exercice 2</u>

1) On a clairement que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Par ailleurs,

si $X = \frac{1}{x}$, $\lim_{X \to +\infty} X^2 e^{-X} = 0$ donc
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0.$$

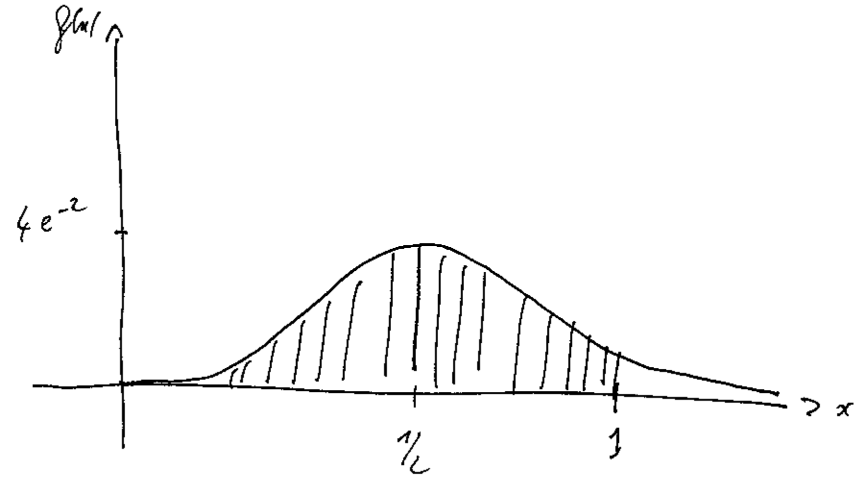
2) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x>0, \quad f'(x) = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$
$$= \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4}\left(-2x+1\right)$$

Voici donc le tableau de variations de f :

x		$1/2$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	0 ↗		↘ 0

$f(1/2) = 4e^{-2}$



3) $\forall h \in]0, 1[$, $\displaystyle\int_h^1 f(x)\,dx = \int_h^1 \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx = \left[e^{-1/x} \right]_h^1 = e^{-1} - e^{-1/h}$.

4) On a donc $\displaystyle\lim_{h \to 0} \int_h^1 f(x)\,dx = e^{-1}$.

Cette limite représente l'aire entre la courbe et l'axe $y=0$.

Elle est hachurée dans le graphe de f.

5) Montrons par récurrence la proposition P_n suivante.

P_n : $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{R_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-1/x}$ où R_n est un polynôme.

Pour $n=0$, $\forall x>0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$. Donc P_0 est vérifiée avec $R_0(x) = 1$.

On suppose que P_n est vérifiée et on montre P_{n+1}.

Donc $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{R_n(x)}{x^{2n+2}} e^{-1/x}$.

Puisque $\forall x > 0$, $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$, alors

$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = \left[\frac{R_n'(x)}{x^{2n+2}} - (2n+2)\frac{R_n(x)}{x^{2n+3}} + \frac{R_n(x)}{x^{2n+4}}\right] e^{-1/x}$$

$$= \frac{1}{x^{2(n+1)+2}}\left[x^2 R_n'(x) - (2n+2)x\, R_n(x) + R_n(x)\right] e^{-1/x}$$

Posons, $\forall x > 0$, $R_{n+1}(x) = x^2 R_n'(x) - (2n+2)\, x\, R_n(x) + R_n(x)$

alors R_{n+1} est un polynôme et

$$\forall x > 0, \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)+2}}\, e^{-\frac{1}{x}}$$

Donc P_{n+1} est vérifiée, ce qui achève la récurrence.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

En particulier on a bien montré que.

$$\underline{\forall x > 0, \quad R_{n+1}(x) = x^2 R_n'(x) + R_n(x)\left[1 - 2x(n+1)\right]}.$$

6) On a $\forall x > 0$, $\underline{R_0(x) = 1}$, Par la relation de récurrence on a $\forall x > 0$, $\underline{R_1(x) = 1 - 2x}$. $\forall x > 0$,

$$R_2(x) = x^2(-2) + (1-2x)(1 - 4x)$$

$$\underline{R_2(x) = 6x^2 - 6x + 1.}$$

$$\forall x > 0, \quad R_3(x) = x^2(12x - 6) + (6x^2 - 6x + 1)(1 - 6x)$$

$$= -24x^3 + 36x^2 - 12x + 1.$$

7) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que le degré du polynôme R_n est n, que son coefficient dominant est $(-1)^{n+1}(n+1)!$ et que le terme constant est 1.
Pour cela, soit la proposition P_n suivante.

$$P_n : \exists\, a_0, \dots, a_n, \quad R_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$\text{avec } a_n = (-1)^{n+1}(n+1)! \quad \text{et} \quad a_0 = 1.$$

D'après la question précédente on a bien P_0, P_1 et même P_2 et P_3.

On suppose P_n et on montre P_{n+1}.
La relation de récurrence nous donne que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$R_{n+1}(x) = x^2 R_n'(x) + R_n(x)\left(1 - 2x(n+1)\right)$$

Donc $R_{n+1}(0) = R_n(0) = 1$

donc le terme constant est bien 1.

~~Par ailleurs, si on regarde le terme de plus haut degré de R_{n+1} on a.~~

Par ailleurs on sait que $R_n(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!\, x^n + Q(x)$ où Q est un polynôme de degré au plus $n-1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $R_{n+1}(x) = x^{n+1}\left(n(-1)^{n+1}(n+1)!\right) + x^2 Q'(x)$
$+ \left((-1)^{n+1}(n+1)!\, x^n + Q(x)\right)\left(1 - 2x(n+1)\right)$

$= x^{n+1}(-1)^{n+2}(n+1)!\left(-n + 2(n+1)\right) + x^2 Q'(x) + Q(x) \times (1-2x(n+1))$

$$= x^{n+1}(-1)^{n+2}(n+2)! + \underbrace{x^2 Q'(x) + Q(x)\left(1-2x(n+1)\right)}_{\text{Polynôme de degré au plus } n}$$

ce qui démontre P_{n+1} et achève la récurrence.

Ainsi on a démontré P_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

⑧ Montrons la formule pour $n=0$. On a

$\forall x > 0$, $g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x)$. Mais

on sait que $f'(x) = \frac{1-2x}{x^2} f(x)$ ainsi on a bien

$\forall x > 0$, $g'(x) = f(x)$.

Pour montrer cette formule pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de dériver n fois cette dernière équation.

9) On sait que ~~$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$~~ $\forall x > 0 \quad g(x) = x^2 f(x)$. On utilise la formule de Leibniz au rang $n+1$.

$$\forall x > 0, \quad g^{(n+1)}(x) = x^2 f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)x\, f^{(n)}(x) + (n+1)n\, f^{(n-1)}(x).$$

Puisque $\forall x > 0$, $g^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)$ on a alors.

$$0 = x^2 f^{(n+1)}(x) + (2x(n+1) - 1) f^{(n)}(x) + (n+1)n\, f^{(n-1)}(x).$$

Mais on sait de plus que $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{R_n(x) e^{-1/x}}{x^{2n+2}}$

donc $0 = \dfrac{1}{x^{2n+2}} \left(R_{n+1}(x) \right) + (2x(n+1)-1) \dfrac{R_n(x)}{x^{2n+2}} + \dfrac{(n+1)n\, R_{n-1}(x)}{x^{2n}}$

Donc $\forall x > 0$, $\underline{R_{n+1}(x) = (1 - 2x(n+1)) R_n(x) - n(n+1)x^2 R_{n-1}(x)}$

10) D'après la question 5), on sait que

$\forall x > 0$, $R_{n+1}(x) = x^2 R_n'(x) + R_n(x)(1 - 2x(n+1))$

donc d'après ce qui précède $\forall x > 0 \quad x^2 R_n'(x) = -n(n+1)x^2 R_{n-1}(x)$

soit donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0 \quad R_n'(x) = -n(n+1) R_{n-1}(x)$.

11) On sait que $\forall x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$R_{n+1}(x) = x^2 R_n'(x) + R_n(x)(1 - 2x(n+1)).$$

On dérive cette expression, on obtient.

$\forall x > 0, \quad R'_{n+1}(x) = 2x\, R'_n(x) + x^2 R''_n(x) + R'_n(x)(1-2x(n+1))$
$- 2(n+1)\, R_n(x).$

Mais on sait que $R'_{n+1}(x) = -(n+1)(n+2)\, R_n$.

Donc, $\forall x > 0 \quad -(n+1)(n+2)\, R_n(x) = 2x\, R'_n(x) + x^2 R''_n(x) + R'_n(x)(1-2x(n+1))$
$-2(n+1)\, R_n(x).$

On regroupe les terms pour obtenir la formule demandée.