Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Math I - CPGEI

Corrigé Devoir n^o 5

Partie commune

Analyse

<u>Exercice 1.</u> *Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans lui même. On considère l'équation différentielle sur (E) :*

$$(1+x^2)y'(x)+y(x)=f(x),$$

1. *On suppose que $f=0$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).*
2. *On suppose que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\arctan(x)e^{-\arctan(x)}$. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.* Indication : on pourra utiliser la méthode de la variation de la constante
3. *On suppose que $f=C$ où C est une constante réelle. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.*
4. *En déduire les solutions des équations différentielles suivante :*

$$(1+x^2)y'(x)+y(x)=y(0),$$
$$(1+x^2)y'(x)+y(x)=2y(0).$$

Corrigé :

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}\ni x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ admet une primitive, la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $\mathbb{R}\ni x\mapsto\arctan(x)$. Ainsi l'ensemble des solutions de l'equation différentielle (E) lorsque $f=0$ est
$$\mathcal{S}=\{\mathbb{R}\ni x\mapsto\lambda e^{-\arctan(x)},\ \lambda\in\mathbb{R}\}.$$
2. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène est décrit par l'ensemble $\mathcal{S}$ ci-dessus. Il nous reste à trouver une solution particulière. Soit la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}\ni x\mapsto\frac{\arctan(x)^2}{2}e^{-\arctan(x)}$, montrons que y_0 est une solution particulière de (E) avec pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\arctan(x)e^{-\arctan(x)}$. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$y_0'(x)=e^{-\arctan(x)}\left(\frac{\arctan(x)}{1+x^2}-\frac{\arctan(x)^2}{2(1+x^2)}\right),$$
ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}(1+x^2)y_0'(x)+y_0(x)&=e^{-\arctan(x)}\left(\arctan(x)-\frac{\arctan(x)^2}{2}\right)+\frac{\arctan(x)^2}{2}e^{-\arctan(x)}\\&=e^{-\arctan(x)}\arctan(x)=f(x).\end{aligned}$$
Ainsi l'ensemble des solutions de l'equation différentielle (E) lorsque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\arctan(x)e^{-\arctan(x)}$ est
$$\mathcal{R}=\{\mathbb{R}\ni x\mapsto\lambda e^{-\arctan(x)}+\frac{\arctan(x)^2}{2}e^{-\arctan(x)},\ \lambda\in\mathbb{R}\}.$$
Bien entendu, j'ai trouvé cette solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.

3. De même, il faut seulement trouver une solution particulière de l'équation différentielle (E) lorsque $f = C$. Il est évident que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) = C$ est une solution particulière. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'equation différentielle (E) lorsque $f = C$ est

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{R} \ni x \mapsto \lambda e^{-\arctan(x)} + C,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

4. Pour la première équation différentielle, puisque $y(0)$ est une constante, il suffit d'appliquer la question précédente avec $C = y(0)$. Ainsi la solution y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, pout tout $x \in \mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \lambda e^{-\arctan(x)} + y(0).$$

Puisque sa valeur en 0 est $y(0)$, forcément $\lambda = 0$. La solution de la première équation est donc la fonction constante $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = y(0)$.

Pour la deuxième équation, la solution y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, pout tout $x \in \mathbb{R}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \lambda e^{-\arctan(x)} + 2y(0).$$

Puisque sa valeur en 0 est $y(0)$, on a donc $\lambda = -y(0)$. La solution de la deuxième équation est $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = -y(0)e^{-\arctan(x)} + 2y(0)$.

Exercice 2. *L'objectif de cet exercice est de résoudre, sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants suivante :*

$$(E) \qquad x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0, \qquad x \in]0, +\infty[.$$

1. *Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et soit z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(e^t)$. Montrer que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.*
2. *Réciproquement, soit z une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit y la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $y(x) = z(\ln x)$. Montrer que y est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.*
3. *Montrer que $y(x)$ est solution de (E)* ***si, et seulement si*** *$z(t) = y(e^t)$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E'), une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants que l'on déterminera.*
4. *En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.*

Corrigé :

1. La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. Donc la fonction z est bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle est la composée de deux fonctions deux fois dérivables sur leurs domaines de définition respectifs. Elle est donc deux fois dérivable.
2. La fonction $x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc la fonction y est bien définie sur $]0, +\infty[$. Elle est la composée de deux fonctions deux fois dérivables sur leurs domaines de définition respectifs. Elle est donc deux fois dérivable.
3. Supposons que y est solution de (E). Elle est donc deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. D'après la question 1, la fontion $z : t \mapsto z(t) = y(e^t)$ est donc deux fois dérivable, et en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient :

$$z'(t) = e^t\ y'(e^t) \qquad \text{et} \qquad z''(t) = (e^t)^2\ y''(e^t) + e^t y'(e^t).$$

Comme y est solution de (E), on a pour tout x dans $]0, +\infty[$: $x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$. Ainsi, pour $x = e^t$, cette égalité donne :

$$\begin{aligned}(e^t)^2y''(e^t) - e^ty'(e^t) + y(e^t) = 0 &\iff (e^t)^2y''(e^t) + e^ty'(e^t) - 2e^ty'(e^t) + y(e^t) = 0\\ &\iff z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai quel que soit $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que la fontion z est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants suivante :

$$(E') \qquad z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, soit z une solution de (E'). Montrons qu'alors la fonction $y : x \mapsto y(x) = z(\ln x)$ est une solution de (E). D'après la question 2, comme z est deux fois dérivable, y est aussi deux fois dérivable, et on a pour tout $x > 0$:

$$y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x) \qquad \text{et} \qquad y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x),$$

ce qu'on peut réécrire de la manière suivante :

$$xy'(x) = z'(\ln x) \qquad \text{et} \qquad x^2 y''(x) = -z'(\ln x) + z''(\ln x),$$

Comme z est solution de (E'), on a, en prenant $t = \ln x$:

$$z''(\ln x) - 2z'(\ln x) + z(\ln x) = 0 \iff x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0,$$

ce qui implique que y est solution de (E).

4. D'après la question 3, les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont obtenues en trouvant toutes les solutions z de (E') sur $\mathbb{R}$ et en prenant $y(x) = z(\ln x)$. L'équation caractéristique de (E') est $r^2 - 2r + 1 = 0$. Cette équation admet $r = 1$ comme racine double. Les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $z(t) = (\lambda t + \mu)e^t$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On conclut donc que les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions :

$$y(x) = (\lambda \ln x + \mu)x, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Algèbre

Exercice 3. *Étant donné un entier naturel $n \geq 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z vérifiant*

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \ [2^n]. \tag{1}$$

1. *[0.5pt] Dans cette question on suppose que $n = 2$. Montrer que l'équation (1) admet une solution $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.*
2. *Dans cette question on suppose que $n = 3$.*
   a) *[1pt] Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $r(m)$ le reste de la division euclidienne de m^2 par 8. Déterminer les éléments de l'ensemble*
   $$\{r(m) \ / \ m \in \mathbb{N}\}.$$
   b) *[1pt] En déduire que l'équation (1) n'admet pas de solution $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.*
3. *[1pt] Dans cette question on suppose que $n \geq 4$.*
   a) *[1pt] Soit $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tel que x et y sont pairs et z est impair. Calculer le reste de la division euclidienne de $x^2 + y^2 + z^2$ par 4 et en déduire que (x, y, z) n'est pas solution de (1).*
   b) *[1pt] Soit $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tel que x, y et z sont impairs. Calculer le reste de la division euclidienne de $x^2 + y^2 + z^2$ par 8 et en déduire que (x, y, z) n'est pas solution de (1).*
   c) *[1pt] En déduire que l'équation (1) n'admet pas de solution $(x, y, z) \in \mathbb{N}$.*

Corrigé :

1. On vérifie que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^2 - 1[2^2]$ a des solutions naturelles. En effet, par exemple $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ fournit une solution $1^2 + 1^2 + 1^2 \equiv 3[4]$.

2. *a*) Faisons un tableau :

$m[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$m^2[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1

L'ensemble $\{r(m)|m \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4\}$.

b) On cherche les solutions $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7[8]$. Parmi les restes possibles de m^2 il faut que un des trois nombres soit égale à 4, car les autres - 0 et 1 sont trop petits, donc $4 + y^2 + z^2 = 7$ implique $y^2 + z^2 = 3$ ce qui est impossible car comme 3 est impair alors, forcément un des nombres est 1 et l'autre - pair 0 ou 4 ce qui ne donne pas 3.

3. On cherche x, y, z tels $x^2+y^2+z^2 \equiv 2^n - 1 \equiv -1[2^n]$ pour $n \geq 4$. Notons Σ la somme $x^2+y^2+z^2$.

a) [1pt] Si x, y sont pairs $x^2 \equiv y^2 \equiv 0[4]$ et $z^2 \equiv 1[4]$ (calcul). Donc $\Sigma \equiv 1[4]$ ce qui signifie que il $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $\Sigma = 4k + 1$. Comme on cherche $\Sigma \equiv -1[2^n]$ on reécrit cette equivalence $4k + 1 \equiv -1[2^n]$ ce qui implique qu'il existe un $k' \in \mathbb{N}$ tel que $4k + 2 = 2^n k'$. Or pour $n > 3, 2^n k - 4k = 4(2^{n-2}k' - k) = 2$ mais 4 ne divise pas 2 - il n'y a pas de k et k' possibles.

b) [1pt] De la question 2 on a que pour x, y, z impairs $\Sigma \equiv 3[8]$, i.e. il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\Sigma = 8s + 3$. Il n'y a pas de solution de $8s + 3 \equiv -1[2^n]$ pour $n > 3$ car sinon, il y aurait eu $t \in \mathbb{N}$ tel que $8s + 4 - 2^n t = 0$. Or dans cette égalité il y a deux termes, $8s$ et 2^n, qui sont divisibles par 8 et le troisième, 4, ne l'est pas.

c) [1pt] On conclut en remarquant que autres cas de parité de x, y, z ne sont pas possibles (à un changement d'ordre de x, y, z près) - tous les trois nombres pairs ou deux nombres impairs et un pair donnent Σ pair. Alors impossible que Σ pair et $\Sigma \equiv -1[2^n]$. Donc toutes les combinaisons possibles de parité de trois nombres nous donnent que l'équation n'a pas de solution pour $n > 2$.

Exercice 4.

1. *[1pt] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que n divise l'entier $\underbrace{999...999}_{k \text{ chiffres } 9}$, alors $PGCD(n, 10) = 1$.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note f_n l'application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ définie pour tout entier naturel k par :*
   $f_n(k)$ est le reste de la division euclidienne de 10^k par n.
   a) [1pt] Montrer que f_n n'est pas injective.
   b) [1.5pt] On suppose que $PGCD(n, 10) = 1$. Soit a et b deux entiers naturels tels que $a < b$ et $f_n(a) = f_n(b)$. Montrer que n divise $10^{b-a} - 1$.
   c) [1pt] Montrer que si $PGCD(n, 10) = 1$, alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que n divise l'entier $\underbrace{999...999}_{k \text{ chiffres } 9}$.
3. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $PGCD(m, 10) = 1$, alors il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que m divise l'entier $\underbrace{111...111}_{k \text{ chiffres } 1}$.*

Corrigé :

1. En effet, si n divise $\underbrace{999...999}_{k \text{ chiffres } 9}$, il ne peut pas être un multiple de 2 ni de 5, ce qui implique que PGCD$(n, 2 \cdot 5) = 1$ $(2 \cdot 5 = 10)$.

2. *a*) Il n'y a que n restes possibles de la division euclidienne de 10^k par n. La fonction $f_n(k)$ prend des valeurs dans un ensemble fini, tandis que l'ensemble $\{10^k, k \in \mathbb{N}\}$ est infini. Alors $f_n(k)$ ne peut pas être injective.

b) Soit PGCD$(n, 10) = 1$. Alors, par le 2*a*) il $\exists a, b \in \mathbb{N}$, tels que $10^a \equiv 10^b[n]$. Cela implique qu'il $\exists l \in \mathbb{N}$ tel que $10^b - 10^a = l \cdot n$. Pour $a < b$, $10^b - 10^a = 10^a(10^{b-a} - 1) = l \cdot n$. Comme

$\mathrm{PGCD}(n,10)=1$ on a aussi $\mathrm{PGCD}(n,10^a)=1$ et par le lemme de Gauss il suit que n divise $10^{b-a}-1$. Donc $10^{b-a}\equiv 1[n]$.

c) Soit $f_n(a)=f_n(b)$ comme dans la question 2*b*). Par la question précédente $10^{b-a}\equiv 1[n]$, ce qui implique que $10^{b-a}-1\equiv 0[n]$, mais on remarque que $10^{b-a}-1=\underbrace{999...999}_{b-a \text{ chiffres } 9}$ et alors

$\underbrace{999...999}_{b-a \text{ chiffres } 9}\equiv 0[n]$.

3. Plusieures solutions sont possibles.

Voici une : Par 2*c*) si $\mathrm{PGCD}(m,10)=1$, alors il existe un entier $k\in\mathbb{N}^*$ tel que m divise l'entier $\underbrace{999...999}_{k \text{ chiffres } 9}$. Soit r tel que $\underbrace{999...999}_{k \text{ chiffres } 9}=m\cdot r$. On remarque que $\underbrace{999...999}_{k \text{ chiffres } 9}=9\cdot\underbrace{111...111}_{k \text{ chiffres } 1}$. On peut avoir trois cas : $\mathrm{PGCD}(m,9)=1$ ou 3 ou 9. Si $\mathrm{PGCD}(m,9)=1$ alors par Gauss $r=9r'$ et $\underbrace{111...111}_{k \text{ chiffres } 1}=mr'$. Si $\mathrm{PGCD}(m,9)=3$ (ou 9) le nombre $\underbrace{111...111}_{3k \text{ chiffres } 1}$ ou ($\underbrace{111...111}_{9k \text{ chiffres } 1}$) est un multiple de m.

Voici une autre solution : le $\mathrm{PGCD}(10,m)=1 \Rightarrow \mathrm{PGCD}(10,9m)=1$ aussi. Par la question 2*c*) il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $\underbrace{999...999}_{k \text{ chiffres } 9}$ est un multiples de $9m$, ce qui implique qu'il existe $r\in\mathbb{N}$ tel que $\underbrace{999...999}_{k \text{ chiffres } 9}=9m\cdot r$.

Si on divise par 9 de deux coté on a alors $\underbrace{111...111}_{k \text{ chiffres } 1}=mr$, i.e. $\underbrace{111...111}_{k \text{ chiffres } 1}$ est un multiples de m.