
Devoir n° 4
Partie commune

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.
L'usage des calculatrices est interdit.

Les deux parties Algèbre et Analyse doivent être traitées sur deux copies différentes. Chacune de ces parties donnera lieu a une note qui pourra dépasser 10, mais seuls les 10 premiers points seront comptabilisés.

Analyse

Exercice 1. Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes. On ne demande pas de préciser les domaines de définition des fonctions considérées.

1. $f : x \mapsto (3x-5)^{12}$ 2. $g : x \mapsto x^2 \ln x$ 3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x \ln\ln x}$ 4. $j : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{40x - 9 - 16x^2}}$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction continue sur $\mathbb{R}$ donnée par $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$.
On se donne un élément $x \in \mathbb{R}$ et on pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad I_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$.

1. Montrer que la suite $(I_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de la forme
$$I_{n+1}(x) = \alpha_n I_n(x) + \beta_n \frac{x}{(1+x^2)^n},$$
où α_n et β_n sont des coefficients dépendants de n à déterminer.
2. Calculer $I_1(x)$. En déduire $I_2(x)$, $I_3(x)$ et $I_4(x)$.

Exercice 3. On admet que la longueur d'une courbe décrite par $y = f(x)$ où f est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ est donnée par
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

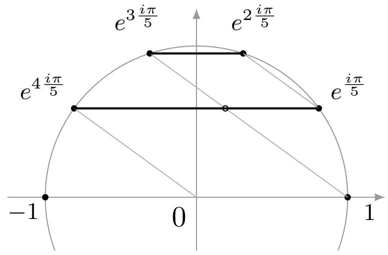
1. Déterminer la longueur de la courbe $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$.

2. (a) Rappeler l'équation vérifiée par les coordonnnées (x, y) d'un point d'un cercle de centre 0 et de rayon r.
   (b) En déduire une fonction f telle qu'un tel cercle peut être décrit par l'union des deux courbes $y = f(x)$ et $y = -f(x)$.
   (c) Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
   (d) Retrouver la circonférence d'un cercle de rayon r.

Algèbre

Exercice 4. On pose $\zeta = e^{i\frac{\pi}{5}}$, $A = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $B = 2\cos\dfrac{\pi}{5}$.

1. Démontrer que $A = e^{i\frac{2\pi}{5}} - e^{i\frac{3\pi}{5}}$.
2. Démontrer que $B = e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{i\frac{4\pi}{5}}$.
3. Exprimer A et B en fonction de ζ.
4. Calculer ζ^5.
5. Montrer que $A - B + 1 = 0$.
6. Recopier le dessin suivant, indiquer A et B, et le sens géométrique de l'égalité $B = A + 1$.



Exercice 5. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. L'ensemble $\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z^2) < 0,\ \mathrm{Im}(z) = 1 \}$ est vide.
2. L'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^3$ est injective.
3. Le nombre complexe $-\sqrt{3} - i$ est une racine carrée de $4e^{\frac{-i\pi}{3}}$.
4. Pour tout réel θ, on a : $|\sin(\theta)| \geq \left|\dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}\right|$.
5. Les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2i$, $b = 2 + i$ et $c = -1 + 3i$ forment un triangle ABC rectangle en A.
6. La transformation du plan $z \mapsto (1 - i)z + 2 + i$ est une similitude de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ et de centre $1 + i$.
7. Soit $P(z) = z^2 + bz + c$ un polynôme d'une variable complexe z à coefficients complexes b, c. Soient u, v des nombres complexes tels que $P(z) = (z - u) \cdot (z - v)$, alors u et v sont les racines du polynôme $P(z)$ et $c = uv$.