Corrigé Devoir n° 4

PARTIE COMMUNE

Analyse

Exercice 1. *Calculer une primitive pour chacune des fonctions suivantes. On ne demande pas de préciser les domaines de définition des fonctions considérées.*

1. $f : x \mapsto (3x-5)^{12}$ *2.* $g : x \mapsto x^2 \ln x$ *3.* $h : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x \ln \ln x}$ *4.* $j : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{40x - 9 - 16x^2}}$

Corrigé :

1. On considère la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{3\times 13}(3x-5)^{13}$ définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On observe que $F' = f$, ainsi F est une primitive de f.
2. On cherche à calculer $\int x^2 \ln x dx$. Pour cela on effectue une intégration par partie en posant $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$ (licite, ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$). On a alors :
$$\int x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right] - \int \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right].$$
Ainsi la fonction $G : x \mapsto \frac{x^3}{3}(\ln x - \frac{1}{3})$ est une primitive de g.
3. On considère la fonction $H : x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$ définie, continue et dérivable sur $]e, +\infty[$. On observe que $H' = h$, ainsi H est une primitive de h.
4. On cherche à calculer
$$\int \frac{1}{\sqrt{40x-9-16x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{-9-(4x-5)^2+25}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{16-(4x-5)^2}}dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-\frac{5}{4})^2}}dx = \frac{1}{4}[\arcsin(x-\frac{5}{4})].$$
Ainsi la fonction $J : x \mapsto \frac{1}{4}\arcsin(x - \frac{5}{4})$ est une primitive de j.

Exercice 2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction continue sur $\mathbb{R}$ donnée par $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$. On se donne un élément $x \in \mathbb{R}$ et on pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad I_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$.*

1. Montrer que la suite $(I_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation de la forme
$$I_{n+1}(x) = \alpha_n I_n(x) + \beta_n \frac{x}{(1+x^2)^n},$$
où α_n et β_n sont des coefficients dépendants de n à déterminer.

2. Calculer $I_1(x)$. En déduire $I_2(x)$, $I_3(x)$ et $I_4(x)$.

Corrigé :

1. On a, pour $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}dt \\
&= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt \qquad (1)\\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{(1+t^2)-1}{(1+t^2)^{n+1}}dt \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n(x) - 2nI_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

(1) : On effectue une intégration par partie en posant $u(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$ et $v(t) = t$ (licite, ce sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

Ainsi, on a montré

$$I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n}I_n(x) + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}.$$

2. On calcule :

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \arctan x \\
I_2(x) &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} \\
I_3(x) &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)}\right) + \frac{x}{4(1+x^2)^2} \\
I_4(x) &= \frac{5}{6}\left(\frac{3}{8}\arctan x + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)^2}\right) + \frac{x}{6(1+x^2)^3}
\end{aligned}$$

Exercice 3. *On admet que la longueur d'une courbe décrite par $y = f(x)$ où f est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ est donnée par*

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

1. *Déterminer la longueur de la courbe $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$.*
2. (a) *Rappeler l'équation vérifiée par les coordonnnées (x,y) d'un point d'un cercle de centre 0 et de rayon r.*
   (b) *En déduire une fonction f telle qu'un tel cercle peut être décrit par l'union des deux courbes $y = f(x)$ et $y = -f(x)$.*
   (c) *Quel est le domaine de définition de la fonction f ?*
   (d) *Retrouver la circonférence d'un cercle de rayon r.*

Corrigé :

1. On calcule la longueur L à l'aide de la formule donnée :

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^3 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}dx = \int_0^3 \sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx = \int_0^3 \sqrt{\frac{1+2x+x^2}{4x}}dx \\
&= \int_0^3 \frac{1+x}{2\sqrt{x}}dx = \int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}\right]_0^3 = 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

2. (a) Le cercle de centre 0 et de rayon r est l'ensemble des points de coordonnées $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

(b) D'après ce qui précède,
$$x^2+y^2=r^2 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{r^2-x^2}.$$
D'où le résultat voulu en posant $f : x \mapsto \sqrt{r^2-x^2}$.

(c) La fonction f est défini sur l'intervalle $[-r;r]$.

(d) La formule de l'énoncé permet de dire que la longueur du demi cercle supérieur est donné par la formule
$$L=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$
D'où
$$L=\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}dx=\int_{-r}^{r}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}dx.$$
On effectue alors le changement de variable $x=r\sin\theta$ ($\frac{dx}{d\theta}=r\cos\theta$) la fonction $\theta\mapsto r\sin\theta$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ dans $[-r;r]$. On en déduit :
$$L=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-r^2\sin^2\theta}}\,(r\cos\theta)d\theta=r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta=r\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=r\pi.$$
Ainsi la circonférence du cercle est $2L=2\pi r$.

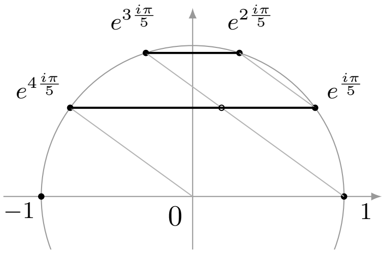
Algèbre

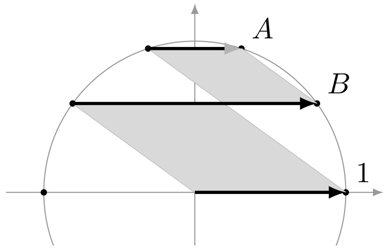
Exercice 4. *On pose* $A=2\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $B=2\cos\dfrac{\pi}{5}$ *et* $\zeta=e^{i\frac{\pi}{5}}$.

1. *Démontrer que* $A=e^{i\frac{2\pi}{5}}-e^{i\frac{3\pi}{5}}$.
2. *Démontrer que* $B=e^{i\frac{\pi}{5}}-e^{i\frac{4\pi}{5}}$.
3. *Exprimer* A *et* B *en fonction de* ζ.
4. *Calculer* ζ^5.
5. *Montrer que* $A-B+1=0$.
6. *Recopier le dessin suivant, indiquer* A *et* B, *et le sens géométrique de l'égalité* $B=A+1$.

Corrigé :

1. À l'aide de la formule d'Euler on a $A=2\cos\dfrac{2\pi}{5}=e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}$. Pour démontrer que $A=e^{i\frac{2\pi}{5}}-e^{i\frac{3\pi}{5}}$ il suffit de démontrer que $-e^{i\frac{3\pi}{5}}=e^{-i\frac{2\pi}{5}}$ ce qui est le cas car $-e^{i\frac{3\pi}{5}}=(-1)\cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}=e^{i\pi}\cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}=e^{-i\pi}\cdot e^{i\frac{3\pi}{5}}=e^{-i\frac{2\pi}{5}}$.
2. Le même genre de calcul nous donne $B=2\cos\dfrac{\pi}{5}=e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{-i\frac{\pi}{5}}$ et $-e^{i\frac{4\pi}{5}}=(-1)\cdot e^{i\frac{4\pi}{5}}=e^{-i\pi}\cdot e^{i\frac{4\pi}{5}}=e^{-i\frac{\pi}{5}}$ en donnant $B=e^{i\frac{\pi}{5}}-e^{i\frac{4\pi}{5}}$.
3. La relation avec ζ est simple :
$$A=\zeta^2-\zeta^3 \text{ et } B=\zeta-\zeta^4$$
4. Calcul : $\zeta^5=(e^{i\frac{\pi}{5}})^5=e^{i\pi}=-1$.
5. Pour montrer que $A-B+1=0$ on a $A-B+1=\zeta^2-\zeta^3-\zeta+\zeta^4+1=\dfrac{1+\zeta^5}{1+\zeta}=0$.





6. Remarquez que sur le dessin, on voit les points sur le cercle de rayon 1, d'affixes $e^{i\frac{\pi}{5}}, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{3\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{5}}$. Le vecteur B est la différence de deux vecteurs d'affixes $e^{i\frac{\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{5}}$. On voie qu'il est parallèle au vecteur A, qui est la différence des vecteurs des affixes $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{3\pi}{5}}$ et aussi au vecteur d'affixe 1. Sur le dessin, on voit les deux losanges et on conclut que le vecteur B est égale à la somme de deux vecteurs dont l'un est égale au vecteur d'affixe 1 et l'autre au vecteur d'affixe A i.e. $A + 1 = B$.

<u>Exercice 5.</u> Corrigé :

1. *"L'ensemble* $\left\{ z \in \mathbb{C} \mid Re(z^2) < 0,\ Im(z) = 1 \right\}$ *est vide"* - faux. En effet, par exemple, $z = 1/2 + i$ appartient à cet ensemble.
2. *"L'application* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^3$ *est injective"* - faux. Pour un $z \in \mathbb{C}$ il y a trois valeurs antécedents différents de z^3 à savoir : $z, ze^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
3. *"Le nombre complexe* $-\sqrt{3} - i$ *est une racine carrée de* $4e^{\frac{-i\pi}{3}}$ *"* - faux :
$$(-\sqrt{3} - i)^2 = 3 - 1 + 2\sqrt{3} \cdot i = 2 + 2\sqrt{3} \cdot i = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \neq 4e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$
4. *"Pour tout réel* $\theta \in \mathbb{R}$*, on a :* $|\sin(\theta)| \geq \left|\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\right|$ *"* - vrai. On a
$$(\sin\theta)^2 = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = \frac{-e^{2i\theta} - e^{-2i\theta} + 2}{4} = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$
et puisque $|\sin\theta| \leq 1$ on a $|\sin\theta| \geq |\sin\theta|^2 = \left|\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}\right|$.
5. *"Les points A, B et C d'affixes respectives* $a = -2i$, $b = 2 + i$ *et* $c = -1 + 3i$ *forment un triangle ABC rectangle en A"* est faux car les vecteurs AB et AC d'affixes $b - a = 2 + 3i$ et $c - a = -1 + 5i$ ne sont pas orthogonaux. Si c'était le cas $\frac{b - a}{c - a}$ aurait été un multiple réel de $i = e^{i\pi/2}$, c'est à dire purement imaginaire. Or $\frac{2 + 3i}{-1 + 5i} = \frac{(2 + 3i)(-1 - 5i)}{26} = \frac{13 - 13i}{26} = \frac{1 - i}{2}$.
6. *"La transformation du plan* $z \mapsto (1 - i)z + 2 + i$ *est une similitude de rapport* $\sqrt{2}$*, d'angle* $-\frac{\pi}{4}$ *et de centre* $1+i$*"* est faux, car le centre d'une similitude est son point fixe mais $1+i \mapsto (1-i)(1+i)+2+i = 4+i$. Ce point change sous cette application - donc $1 + i$ n'est pas le centre.
7. *"Soit* $P(z) = z^2 + bz + c$ *un polynôme d'une variable complexe* z *à coefficients complexes* b, c*. Soient* u*,* v *des nombres complexes tels que* $P(z) = (z - u) \cdot (z - v)$*, alors* u *et* v *sont les racines du polynôme* $P(z)$ *et* $c = uv$*"* est vrai. En effet les racines d'un polynôme sont les points où le polynôme s'annule, c'est-à-dire, si u et v sont des racines de P, on a $P(u) = 0$ et $P(v) = 0$ ce qui est évidement le cas. Si on dévelope $(z - u)(z - v)$ on a $P(z) = z^2 - (u + v)z + uv$ en comparant les coefficients avec $z^2 + bz + c$, on déduit que $uv = c$.