Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Math I - CPGEI

Devoir n^o 3

PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

On rappelle le théorème des valeurs intermédiaires vu en Terminale :

Théorème. *Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction* ***continue****. Alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.*

Exercice 1. Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = n(x+1) + e^x$.
   (a) Dresser le tableau des variations de g_n.
   (b) Montrer que g_n est injective.
   (c) Etudier le signe de $g_n(-1)$ et $g_n(-2)$. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α_n et que $-2 < \alpha_n < -1$.
   (d) En déduire le signe de $g_n(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{xe^x}{n+e^x}$. On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} (f_n(x) - x)$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_n$ admet deux asymptotes que l'on précisera.
   (b) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{e^x g_n(x)}{(n+e^x)^2}$.
   (c) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 0.
   (d) Montrer $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$.
   (e) Donner le tableau des variations de f_n.
3. (a) Etudier la positon relative de la courbe $\mathscr{C}_n$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
   (b) Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.
   (c) Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ (on prendra 2cm comme unité de longueur ; on donne $\alpha_1 \approx -1,4$ et $\alpha_2 \approx -1,2$).

Exercice 2. Dire si l'ensemble $A = \left\{(x^2-1)e^{-x},\ x \in \mathbb{R}\right\}$ a un minimum ou un maximum, et si oui déterminer leurs valeurs.

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$Z^2 - (5-14i)Z - 2(5i+12) = 0.$$

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation

$$z^4 - (5-14i)z^2 - 2(5i+12) = 0.$$

Exercice 4. Soit E un ensemble. Pour toutes parties A et B de E, on pose

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

L'ensemble $A\Delta B$ est appelé *différence symétrique* de A et B. Si A est une partie de E, alors on note $\overline{A}$ la partie complémentaire de A dans E.
Dans la suite de cet exercice, on désigne par A, B et C trois parties de E.

1. Premières propriétés.
   (a) Calculer $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
   (b) Montrer que $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.
   (c) Montrer que $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B = A\Delta\overline{B}$ et que $\overline{A}\Delta\overline{B} = A\Delta B$.
   (d) Montrer que $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
   (e) Soit X une partie de E. Montrer les équivalences

$$(A\Delta X = \emptyset) \Longleftrightarrow (X = A) \quad \text{et} \quad (A\Delta X = E) \Longleftrightarrow (X = \overline{A}).$$

   (f) Montrer que $A\Delta(A\Delta B) = B$.
2. On note $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathfrak{P}(E) & \longrightarrow & \mathfrak{P}(E) \\ & X & \longmapsto & A\Delta X \end{array}.$$

   (a) Montrer que l'application ϕ est injective.
   (b) Utiliser la question 1. (f) pour montrer que l'application ϕ est bijective et que $\phi^{-1} = \phi$.