Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2014-2015

Math I - CPGEI

Devoir n° 1

PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. Le but de cet exercice est d'estimer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$:
$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$
2. Ecrire explicitement ces inégalités pour $k = 2, k = 3$ et $k = 4$.
3. Calculer la somme
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$.

On utilise la notation $k \in [\![a, b]\!]$ pour dire que k est un nombre entier $\geq a$ et $\leq b$.

On rappelle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

1. Vérifier que, pour tout $k \in [\![0, (n-1)]\!]$, on a :
$$\binom{n}{k+1} \; = \; \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}.$$
2. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, (n-1)]\!]$, si $k \leq \frac{n-1}{2}$, alors on a :
$$\binom{n}{k} \; \leq \; \binom{n}{k+1}.$$
3. On suppose n impair.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, (n-1)/2]\!]$, on a : $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{(n-1)/2}$.
   (b) En déduire que, pour tout $k \in [\![(n+1)/2, n]\!]$, on a : $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{(n+1)/2}$.
   (c) Conclure que
$$\max_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \; = \; \binom{n}{(n-1)/2}.$$
4. On suppose n pair. Proposer, *sans démonstration*, une valeur pour $\displaystyle\max_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k}$.

Exercice 3. Justifier l'existence et déterminer le minimum et le maximum des ensembles qui suivent :

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \, |x| \, (1+2y^2) \ ; \ x \in [-2,-1] \cup [3,4], \ y \in [-1,2] \, \right\} \\ B &= \left\{ \, \frac{|1+y^2|}{x-3} \ ; \ (x,y) \in [0,2] \times [-2,1] \, \right\}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $\sqrt{x} \leq x$.
2. En notant $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière, on a, pour tout couple de réels $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\lfloor x \cdot y \rfloor = \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor$.
3. Pour tout couple $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, si $x^2 + y^2 = 0$ alors $x = 0$ ou $y = 0$.
4. L'inégalité $a^2x^2 + 2x + 4 > 0$ est vraie pour tout $a \in \mathbf{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$.
5. Il existe un couple $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, tel que $4y \leq x \leq y$.
6. Pour tout triplet de parties $(A,B,C) \in \mathcal{P}(\mathbf{R})^3$, si $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$ ne sont pas vides, alors $A \cap B \cap C$ n'est pas vide.