Corrigé de Devoir n° 1
PARTIE COMMUNE

Exercice 1. *Le but de cet exercice est d'estimer la valeur de la somme* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$*, pour tout* $n \in \boldsymbol{N}^*$.

1. *Montrer que pour tout* $k \geq 2$: $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. *Ecrire explicitement ces inégalités pour* $k = 2, k = 3$ *et* $k = 4$.
3. *Calculer la somme* $S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$.
4. *Montrer que pour tout* $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

Corrigé :

1. Pour $k \geq 2$, on a $\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{(k-1)k}$. Comme $0 < k-1 < k$, en multipliant par $k(>0)$ on a $0 < (k-1)k < k^2$. Puis, en passant à l'inverse, on obtient pour tout $k \geq 2$:
$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}.$$

2. On a pour $k = 2$, $k = 3$ et $k = 4$:
$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right); \quad \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} < \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right); \quad \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} < \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right).$$

3. Pour $n \geq 2$, on a
$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n}.$$

4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Si $n = 1$, on a bien $n = 1 < 2$: le résultat est vrai.
Si $n \geq 2$, on vient de montrer que pour tout $k \geq 2$, on a $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. En faisant la somme terme par terme, on obtient
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = S_n = 1 - \frac{1}{n}.$$
En ajoutant 1 des deux cotés on a l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$, d'où le résultat (comme $-\dfrac{1}{n} < 0$).

En conclusion, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Exercice 2. *Soit $n \in \boldsymbol{N}^\star$.*
On utilise la notation $k \in [\![a,b]\!]$ pour dire que k est un nombre entier $\geq a$ et $\leq b$. On rappelle que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

1. *Vérifier que, pour tout $k \in [\![0,(n-1)]\!]$, on a : $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$.*
2. *Montrer que, pour tout $k \in [\![0,(n-1)]\!]$, si $k \leq \frac{n-1}{2}$, alors on a : $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1}$.*
3. *On suppose n impair.*
   (a) *Montrer que, pour tout $k \in [\![0,(n-1)/2]\!]$, on a : $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{(n-1)/2}$.*
   (b) *En déduire que, pour tout $k \in [\![(n+1)/2,n]\!]$, on a : $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{(n+1)/2}$.*
   (c) *Conclure que*
   $$\max_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k} = \binom{n}{(n-1)/2}.$$
4. *On suppose n pair. Proposer, sans démonstration, une valeur pour $\max\limits_{0\leq k\leq n}\dbinom{n}{k}$.*

Corrigé :

1. Pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, on a :
$$\begin{aligned}(k+1)!\cdot(n-(k+1))! &= (k+1)!\cdot(n-k-1)!\\ &= \frac{k+1}{(n-k)}\cdot k!\cdot(n-k)!\ ;\end{aligned}$$
d'où, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$:
$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!} = \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}.$$
2. Si $k \leq \dfrac{n-1}{2}$, on a alors
$$\begin{aligned}k+1 &\leq \frac{n-1}{2}+1 = \frac{n-1+2}{2} = \frac{n+1}{2};\\ n-k &\geq n-\frac{n-1}{2} = \frac{2n-n+1}{2} = \frac{n+1}{2};\end{aligned}$$
donc $k+1 \leq n-k$, puis $1 \leq \dfrac{n-k}{k+1}$ (car $n-k>0$). La question (1) nous permet alors de conclure : pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$,
$$\binom{n}{k} \leq \frac{n-k}{k+1}\cdot\binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}.$$
3. On suppose n impair.
   (a) Soit $k \in [\![0,(n-1)/2]\!]$. Par le resultat de (2) appliqué plusieurs fois, on a
   $$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1} \leq \cdots \leq \binom{n}{(n-1)/2-1} \leq \binom{n}{(n-1)/2}.$$
   (b) Pour $k \in [\![(n+1)/2,n]\!]$, on a $n-k \in [\![n-n,n-(n+1)/2]\!] = [\![0,(n-1)/2]\!]$. On peut alors appliquer la question 3(a) à $n-k$:
   $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \leq \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}.$$
   (c) Finalement, $\binom{n}{(n-1)/2}$ est un majorant de l'ensemble $\left\{\binom{n}{k};\ k \in [\![0,n]\!]\right\}$. Puisque c'est aussi un élément de cet ensemble, il en est le maximum :
   $$\max_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k} = \binom{n}{(n-1)/2}.$$
4. Pour n pair, on a $\max\limits_{0\leq k\leq n}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n/2}$.

Exercice 3. *Justifier l'existence et déterminer le minimum et le maximum des ensembles qui suivent :*

$$\begin{aligned} A &= \left\{\ |x|\,(1+2y^2)\ ;\ x \in [-2,-1]\cup[3,4],\ y\in[-1,2]\ \right\} \\ B &= \left\{\ \frac{|1+y^2|}{x-3}\ ;\ (x,y)\in[0,2]\times[-2,1]\ \right\}. \end{aligned}$$

Corrigé :

$$A = \left\{\ |x|\,(1+2y^2)\ ;\ x \in [-2,-1]\cup[3,4],\ y\in[-1,2]\ \right\}$$

On remarque que pour $x \in [-2,-1]\cup[3,4]$ et $y \in [-1,2]$, on a $1 \le |x| \le 4$ et $1 \le (1+2y^2) \le 9$. Ce sont des inégalités dont tous les termes sont positifs, donc on peut les multiplier :

$$1 \le |x|\,(1+2y^2) \le 36.$$

On en déduit que 1 est un minorant de A, et 36 un majorant. Ce sont le minimum et le maximum car ils appartiennent à A : le minimum est atteint en $(x,y)=(-1,0)$ et maximum en $(x,y)=(4,2)$.

$$B = \left\{\ \frac{|1+y^2|}{x-3}\ ;\ (x,y)\in[0,2]\times[-2,1]\ \right\}.$$

On a, pour $x\in[0,2]$, $-3 \le (x-3) \le -1$, puis $1 \le -(x-3) \le 3$. Les termes de cette dernière inégalité sont tous du même signe, on peut donc passer à l'inverse :

$$\frac{1}{3} \le -\frac{1}{x-3} \le 1.$$

Pour $y\in[-2,1]$, on a $1 \le |1+y^2| \le 5$. On multiplie cette inégalité avec la précédente (tous les termes sont positifs), et on obtient :

$$\frac{1}{3} \le -\frac{|1+y^2|}{x-3} \le 5.$$

Finalement, pour $x\in[0,2]$ et $y\in[-2,1]$,

$$-5 \le \frac{|1+y^2|}{x-3} \le -\frac{1}{3}.$$

Comme ses bornes sont atteintes en $(x,y)=(2,-2)$ et $(x,y)=(0,0)$ respectivement, le maximum de B est $-\frac{1}{3}$ et le minimum est -5.

Exercice 4. *Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout* justifier avec précision *cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.*

Corrigé :

1. *Pour tout réel x strictement positif, on a : $\sqrt{x} \le x$.*

   Faux. Un contre-exemple : $x=0,01$ ne satisfait pas la relation $\sqrt{0.01} \le 0.01$ car $\sqrt{0.01} = 0.1 \ge 0.01$.

2. *En notant $\lfloor\cdot\rfloor$ la partie entière, on a, pour tout couple de réels $(x,y)\in\boldsymbol{R}^2$, $\lfloor x\cdot y\rfloor = \lfloor x\rfloor\cdot\lfloor y\rfloor$.*

   Faux. Un contre-exemple : $x=1.5,\ y=10$ donne $\lfloor 1.5\cdot 10\rfloor = 15$ mais $\lfloor 1.5\rfloor\cdot\lfloor 10\rfloor = 10$.

3. *Pour tout couple* $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$, *si* $x^2+y^2=0$ *alors* $x=0$ *ou* $y=0$.

   Vrai. Si $x^2+y^2=0$ on a $x^2=-y^2$. Les carrés des nombres réels sont des nombres positifs ou nuls, donc $x^2 \geq 0$ et $-y^2 \leq 0$. La seule solution de $x^2=-y^2$ est alors $x=y=0$. La solution $x=0$ et $y=0$ implique $x=0$ ou $y=0$.

   On peut aussi le montrer par le contra-posé qui est vrai : NON($x=0$ ou $y=0$) $\Rightarrow$ NON($x^2+y^2=0$), i.e. $x \neq 0$ et $y \neq 0$ implique $x^2+y^2 \neq 0$).

   La négation de (pour tout couple $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, si $x^2+y^2=0 \Rightarrow x=0$ ou $y=0$.) est il $\exists (x,y) \in \mathbf{R}^2$, tel que NON($x^2+y^2 \neq 0$ ou $x=0$ ou $y=0$) ce qui se traduit en il $\exists (x,y) \in \mathbf{R}^2$, tel que ($x^2+y^2=0$ et $x \neq 0$ et $y \neq 0$) ce qui est forcement faux.

4. *L'inégalité* $a^2x^2+2x+4>0$ *est vraie pour tout* $a \in \boldsymbol{R}^*$ *et pour tout* $x \in \boldsymbol{R}$.

   Faux. Un polynome quadratique est toujours positif si son coefficient devant x^2 est strictement positif et qu'il n'a pas de racine (s'en convaincre avec un dessin !). On a bien $a^2>0$ mais l'existence de racines depend du discriminant $\Delta = 4-4\cdot 4a^2$. On voit que $\Delta \geq 0$ uniquement si $4 \geq 16a^2$, donc si $|a| \leq \frac{1}{2}$. Le résultat est donc vrai uniquement si $|a|>1/2$.
   On peut expliciter un contre-exemple : pour $a=1/2$ et $x=-4$, l'inégalité est fausse.

5. *Il existe un couple* $(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$, *tel que* $4y \leq x \leq y$.

   Vrai. En effet, on peut prendre par exemple $x=-1, y=-0.5$.

6. *Pour tout triplet de parties* $(A,B,C) \in \mathcal{P}(\boldsymbol{R})^3$, *si* $A \cap B$, $A \cap C$ *et* $B \cap C$ *ne sont pas vides, alors* $A \cap B \cap C$ *n'est pas vide.*

   Faux. Un contre-exemple : $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$, $C=\{2,3\}$. On a alors $A \cap B = \{1\}$, $A \cap C = \{2\}$ et $B \cap C\{3\}$, mais $A \cap B \cap C = \emptyset$.