Université Claude Bernard - Lyon 1 | Automne 2014
Math II - PMI/CCP | Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 1

Les calculatrices ne sont pas autorisées

Pour f application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$, on note Δf l'application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$ définie par :

$$\text{pour tout entier } n \geq 0,\ (\Delta f)(n) = f(n+1) - f(n).$$

Pour tout entier $k \geq 0$ on notera m_k l'application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$ définie par :

$$\text{pour tout entier } n \geq 0,\ m_k(n) = n^k.$$

Pour tout réel q on notera e_q l'application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$ définie par :

$$\text{pour tout entier } n \geq 0,\ e_q(n) = q^n.$$

Mise en jambes : quelques exemples

1) Soit f une application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$ qu'on suppose constante. Déterminer Δf.

2) a) Montrer que $\Delta m_1 = m_0$.

b) Montrer que $\Delta m_2 = 2m_1 + m_0$.

c) Trouver trois constantes entières a, b et c pour lesquelles :

$$\Delta m_3 = am_2 + bm_1 + cm_0.$$

d) En utilisant les identités a), b) et c), déterminer :

$$\Delta(\frac{m_3}{3} - \frac{m_2}{2} + \frac{m_1}{6}).$$

e) Soit $k \geq 1$. Montrer qu'il existe k constantes entières $a_0, \ldots, a_{k-1}$ (que l'on explicitera) pour lesquelles :

$$\Delta m_k = a_{k-1}m_{k-1} + a_{k-2}m_{k-2} + \cdots + a_1 m_1 + a_0 m_0.$$

3) a) Déterminer Δe_2.

b) Soit q un réel. Montrer qu'il existe une constante λ_q (que l'on explicitera) pour laquelle $\Delta e_q = \lambda_q e_q$.

4) Pour chaque α réel, on note c_α et s_α les applications de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$ définies par :

$$\text{pour tout entier } n \geq 0,\ s_\alpha(n) = \sin(n\alpha) \text{ et } c_\alpha(n) = \cos(n\alpha).$$

On rappelle les formules suivantes, valables pour tous réels φ et ψ :

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi) \text{ et } \cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi).$$

a) Montrer que pour tout α réel et tout $n \geq 0$ entier :

$$(\Delta s_\alpha)(n) = (\cos\alpha - 1)s_\alpha(n) + (\sin\alpha)\, c_\alpha(n) \text{ et } (\Delta c_\alpha)(n) = -(\sin\alpha)\, s_\alpha(n) + (\cos\alpha - 1)c_\alpha(n).$$

b) Soit α un réel. Montrer qu'il existe une constante K_α (que l'on explicitera) pour laquelle :

$$\Delta(\Delta s_\alpha) = K_\alpha(\Delta s_\alpha + s_\alpha).$$

Quelques équations fonctionnelles

5) On note (E) l'équation $\Delta f = 0$, d'inconnue f (application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$).

a) Soit f une solution de (E). Montrer par récurrence sur n le résultat suivant :
pour tout entier $n \geq 0$, $f(n) = f(0)$.

b) Montrer que les solutions de (E) sont les applications constantes.

6) On note (E') l'équation $\Delta f = m_2$, d'inconnue f (application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$).

a) Soit f une solution de (E') telle que $f(0) = 0$. Montrer par récurrence sur n le résultat suivant :

$$\text{pour tout entier } n \geq 1,\ f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2.$$

b) En déduire que (E') possède une et une seule solution f telle que $f(0) = 0$. Sauriez-vous en donner une expression relativement simple (sans symbole Σ) ?

7) On note (E'') l'équation $\Delta f = f$, d'inconnue f (application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$).

a) Soit f une solution de (E'') telle que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $f(n) = 0$.

b) Soit f une solution de (E''). On définit une application g de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$ par :

$$\text{pour tout entier } n \geq 0,\ g(n) = f(n) - 2^n f(0).$$

Vérifier que $g(0) = 0$ et montrer que g est solution de (E''), puis en déduire que pour tout entier $n \geq 0$, $f(n) = 2^n f(0)$.

c) Quelles sont les solutions de (E'') ?

Suites convexes

8) Montrer que pour toute application f de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$ et tous entiers naturels m et n avec $m < n$:

$$f(n) = f(m) + \sum_{k=0}^{n-m-1} (\Delta f)(m+k).$$

9) Soit g une application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$. Montrer que :

$$g \text{ est croissante} \iff \Delta g \text{ ne prend que des valeurs positives .}$$

10) Soit f une application de $\mathbf{N}$ vers $\mathbf{R}$. Dans cette question, on suppose que $\Delta(\Delta f)$ ne prend que des valeurs positives.
On suppose par ailleurs qu'il existe deux entiers naturels $a < b$ pour lesquels $f(a) = f(b) = 0$.

a) En appliquant la question 8) à $m = a$ et $n = b$, montrer par l'absurde que $(\Delta f)(a) \leq 0$ et que $(\Delta f)(b-1) \geq 0$.

b) Soit d un entier avec $b < d$. En appliquant d'une part le a) et d'autre part la question 8 à $m = b$ et $n = d$, montrer que $0 \leq f(d)$.

c) Soit c un entier avec $a \leq c \leq b$. Montrer que $f(c) \leq 0$.