Université Claude Bernard - Lyon 1 — Printemps 2013
Math II - PMI/CCP — Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 1

Pas de calculettes

Les exercices sont indépendants

Exercice 1

Montrer que pour tout réel x :

$$\operatorname{Argch}(\operatorname{ch} x) = |x|.$$

Exercice 2

1) Pour n variant dans $\mathbf{Z}$, déterminer tous les restes possibles pour la division euclidienne de n^3 par 7.

2) Montrer que si trois entiers relatifs x, y et z sont tous trois non divisibles par 7, alors l'entier $x^3 + y^3 + z^3$ n'est pas non plus divisible par 7.

Exercice 3

On considère les fonctions définies pour certains réels θ par :

$$g(\theta) = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} \text{ et } f(\theta) = \operatorname{Arcsin}(g(\theta)).$$

1) a) Montrer que g est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

b) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbf{R}$. Calculer $f(0)$.

2) Montrer que g est dérivable sur $]-\pi, \pi[$ et calculer $g'(\theta)$ pour θ dans cet intervalle.

3) En utilisant la dérivation des fonctions composées, montrer que f est dérivable sur $]0, \pi[$ et calculer $f'(\theta)$ pour θ dans cet intervalle.

4) Déduire de la question précédente une expression de f particulièrement simple, valable sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Exercice 4

1) On définit un ensemble E_0 par :

$$E_0 = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \mid 5x - 11y = 0\}.$$

Montrer que :

$$E_0 = \{(11k, 5k) \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

2) Produire un couple $(s, t) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $5s - 11t = 1$.

3) À partir des deux questions qui précèdent, décrire simplement l'ensemble E défini par :

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{Z}^2 \mid 5x - 11y = 1\}.$$

Exercice 5
L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation ci-dessous, d'inconnue réelle x. :

$$(E) \qquad 2\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

1) Montrer que :

$$\{\varphi \in \mathbf{R} \mid \operatorname{Arcsin}(\sin\varphi) = \varphi\} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

2) Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que :

$$\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)^2 \leq 1.$$

3) Dans la suite de l'exercice on notera, pour les x réels où cette expression a un sens :

$$f(x) = 2\operatorname{Arcsin} x - \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Déterminer le domaine de définition de f.
4) Résoudre l'équation ci-dessous, d'inconnue réelle $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$(E') \qquad f(\sin\theta) = 0$$

5) Résoudre (E).