Université Claude Bernard - Lyon 1 | Printemps 2013
Math II - PMI/CCP | Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 2

Les calculatrices sont autorisées mais totalement inutiles

Exercice 1

Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}.$$

1) Écrire sous forme décimale les nombres réels u_1, u_2 et u_3.

2) Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante.

3) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$u_n \leq \sum_{l=1}^{n!} \frac{1}{10^l}.$$

b) Montrer que (u_n) est une suite majorée.

c) Montrer que (u_n) est une suite convergente.

Dans toute la suite du problème, on notera λ la limite de (u_n).

4) a) Soit $n < m$ deux entiers supérieurs ou égaux à 1.
Montrer que :

$$0 < u_m - u_n \leq \sum_{l=(n+1)!}^{m!} \frac{1}{10^l}.$$

et en déduire que :

$$0 < u_m - u_n \leq \frac{10}{9} \frac{1}{10^{(n+1)!}}.$$

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$0 < \lambda - u_n \leq \frac{10}{9} \frac{1}{10^{(n+1)!}}.$$

5) Pour chaque entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \dfrac{p_n}{10^{n!}}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $p_n \in \mathbf{N}$.

b) Soit P un polynôme à coefficients entiers, qu'on notera :

$$P = m_d X^d + \cdots + m_0$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $10^{n! \times d} P(u_n) \in \mathbf{Z}$.

6) Soit P un polynôme réel non nul.

a) Montrer qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que pour toute racine α de P :

$$\alpha = \lambda \qquad \text{ou} \qquad \epsilon < |\alpha - \lambda|.$$

b) Montrer qu'il existe un $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $P(u_n) \neq 0$.

7) Soit P un polynôme réel et soit d un entier positif.

a) Justifier que la suite de terme général :

$$\frac{P(u_n) - P(\lambda)}{u_n - \lambda}$$

admet une limite quand n tend vers $+\infty$.

b) En déduire qu'il existe un réel positif M tel que pour tout $n \geq 1$:

$$|P(u_n) - P(\lambda)| \leq M(\lambda - u_n).$$

c) Montrer que $10^{n! \times d}\,(P(u_n) - P(\lambda)) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

8) Conclure en montrant qu'il n'existe pas de polynôme P non nul à coefficients entiers dont λ soit racine (on dit que λ est *transcendant*).

Exercice 2

Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1) Soit f une application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. On suppose qu'en tout x_0 réel, la fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de x_0. Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

2) Quand x tend vers 0,

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10}.$$

3) Soit P et Q deux polynômes non constants de $\mathbf{C}[X]$. Le degré de $P + 2Q$ est égal au plus grand des degrés respectifs de P et Q.

4) Soit P et Q deux polynômes de $\mathbf{C}[X]$ et α un nombre complexe. Si α est racine simple de P et racine simple de Q, il est également racine simple de $P - Q$.