Université Claude Bernard - Lyon 1 Printemps 2013
Math II - PMI/CCP Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 5

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer

Exercice 1
Un "vrai ou faux". Comme d'habitude, il ne suffit pas de trouver la bonne réponse au pif pour marquer des points : il faut aussi la justifier !

1) Pour tous espaces vectoriels E et F de même dimension (finie) sur $\mathbf{R}$, il existe une application linéaire bijective de E vers F. Vrai ou faux ?

2) Pour toutes applications linéaires f et g ayant les mêmes espaces de départ et d'arrivée, $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Vrai ou faux ?

3) Pour toutes applications linéaires f et g ayant les mêmes espaces de départ et d'arrivée, $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im}(f+g)$. Vrai ou faux ?

4) Il existe un endomorphisme non nul u de $\mathbf{R}^2$ tel que $u \circ u = 0$. Vrai ou faux ?

Exercice 2
Les deux premières parties sont indépendantes. La "question finale" nécessite de les mettre en relation entre elles.

Première partie
Pour tout $n \geq 0$ on note :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta.$$

1) Montrer que la suite (I_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs.

2) Soit $n \geq 0$. En effectuant une intégration par parties dans l'intégrale

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} \theta \, d\theta,$$

montrer que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

3) Montrer que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \to 1$ quand $n \to +\infty$.

4) Montrer par récurrence sur k que pour tout $k \geq 0$:

$$I_{2k+1} = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}.$$

5) Montrer par récurrence sur k que pour tout $k \geq 0$:

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

6) Montrer que pour tout $k \geq 0$

$$\binom{2k}{k} = \sqrt{\frac{I_{2k}}{I_{2k+1}}} \frac{4^k \sqrt{2}}{\sqrt{2k+1}\sqrt{\pi}}.$$

7) Montrer que quand k tend vers $+\infty$

$$\binom{2k}{k} \sim \frac{4^k}{\sqrt{k}\sqrt{\pi}}.$$

Deuxième partie
Pour tout $n \geq 1$, on note :

$$u_n = n! \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

et :

$$a_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

8) Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

9) Montrer que quand n tend vers l'infini :

$$a_n \sim -\frac{1}{12n^2}.$$

10) Montrer qu'il existe un $N \geq 2$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$-\frac{1}{6n^2} \leq a_n \leq 0.$$

11) Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}.$$

12) En écrivant (en le justifiant !) :

$$\ln(u_n) - \ln(u_N) = \sum_{k=N}^{n-1} a_k,$$

montrer que la suite $(\ln(u_n))_{n \geq N}$ est décroissante et minorée, et en déduire qu'elle possède une limite quand n tend vers $+\infty$.
13) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ (qu'on ne cherchera pas à calculer) telle que, quand $n \to +\infty$:

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Question finale
14) En utilisant la première partie, déterminer la valeur de la constante C apparue dans la question précédente.