Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2013-2014

Math III - PMI — Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 5

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle**.
Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. (Questions de cours, $\simeq$ 3 pts)

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction, et $v \in \mathbb{R}^n$. Rappeler la définition de la dérivée directionnelle de f selon le vecteur v.
2. Enoncer le théorème d'inversion locale.

Exercice 2. ($\simeq$ 4 pts) Considérons les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les polynômes caractéristiques P_A et P_B.
2. Déterminer les polynômes minimaux m_A et m_B.
3. (a) Montrer que si A et B sont semblables alors $A - 2 \cdot I_4$ et $B - 2 \cdot I_4$ le sont également. Ici, I_4 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   (b) Les matrices A et B sont-elles semblables ?
4. Quelle conclusion peut-on tirer de cette étude ?

Exercice 3. ($\simeq$ 3 pts) Etudier si les fonctions suivantes se prolongent par continuité en $(0, 0)$ ou non.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2 + |x+y|}$ 2. $f(x,y) = \dfrac{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^2}$ 3. $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^6 + 2y^2 - 3x^3 y}$

Exercice 4. ($\simeq$ 4 pts) Soit n un entier naturel et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille n à coefficients complexes. On suppose que $M^2 = 2M - I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que M est inversible.
2. Dans la suite de l'exercice, on suppose de plus que $M^3 = M^{-1}$. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de M.
4. Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = 2M - I_n$ et $M^3 = M^{-1}$; déterminer cette matrice.

Exercice 5. ($\simeq$ 2 pts) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$$

Montrer que $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = 0$.

Exercice 6. (Vrai-faux, $\simeq$ 4 pts) Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout **justifier avec précision** cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. L'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\cos(xy) - 1}{xy} & \text{si } xy \neq 0 \\ 23 & \text{si } xy = 0 \end{cases} \end{array}$$

   est différentiable en $(0,0)$.

2. Il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $X^2 + 1$.
3. Soit $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire (avec $d, p \in \mathbb{N}^*$). L'application u est différentiable sur $\mathbb{R}^d$.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M(M - I_n) = 0$. Alors M n'est pas inversible.