Université Claude Bernard Lyon-1
Licence « Sciences et technologie »
Unité d'enseignement Math. II Algèbre

CONTRÔLE FINAL – CORRIGÉ

13 juin 2013 — durée 2 h

Voir les commentaires généraux en page 4.

Questionnaire

1. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible puisqu'elle n'est pas carrée !
2. Le cours donne : $M = PM'P^{-1}$.
3. Les racines complexes de X^4+1 sont les racines quatrièmes de $-1 = e^{i\pi}$. Ce sont donc $z_k = e^{i\frac{\pi}{4}+\frac{2ik\pi}{4}}$, $0 \leq k \leq 3$. Elles sont toutes simples, d'où : $X^4+1 = \prod_{k=0}^{3}(X-z_k)$.
   Dans $\mathbb{R}[X]$, on écrit :
   $$X^4+1 = X^4+2X^2+1-2X^2 = (X^2+1)^2-2X^2 = (X^2+\sqrt{2}X+1)(X^2-\sqrt{2}X+1),$$
   où chacun des facteurs est irréductible car de degré 2 sans racine réelle.
4. On écrit : $X^3 = X(X^2+1) - X$ d'où : $\dfrac{X^3}{X^2+1} = X - \dfrac{X}{X^2+1}$.
   C'est la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ car X^2+1 est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Mais dans $\mathbb{C}[X]$, on a : $X^2+1 = (X-i)(X+i)$. La forme a priori de la décomposition est : $\frac{X^3}{X^2+1} = X + \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i}$ avec a et b complexes. On a :
   $$a = \left.\frac{X^3}{X+i}\right|_{X=i} = -\frac{1}{2} \text{ et } b = \left.\frac{X^3}{X-i}\right|_{X=-i} = -\frac{1}{2}, \text{ d'où : } \frac{X^3}{X^2+1} = X - \frac{\frac{1}{2}}{X-i} - \frac{\frac{1}{2}}{X+i}.$$

Exercice I

1. L'espace E admet pour base $(1, X, X^2)$ donc sa dimension est 3.
2. (a) On commence par remarquer que $X^2 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2$ et $X = \frac{1}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2$, puis : $1 = X^2 - P_3 = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 - P_3$.
   Comme $(1, X, X^2)$ est une base de E, la famille (P_1, P_2, P_3) est génératrice. Comme elle est formée de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base.

   (b) Par définition, la matrice de passage est : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Il suffit de multiplier A par la colonne des coordonnées des Q_i dans la base $(1, X, X^2)$:

$$Q_1 \ : \ A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \ Q_2 \ : \ A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \ ; \ Q_3 \ : \ A \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Comme (Q_1, Q_2, Q_3) est formée de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de montrer qu'elle est libre. C'est parce qu'elle est échelonnée : soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0$. Alors :

$$0 = \lambda_1 + \lambda_2(X-2) + \lambda_3(X^2 - 2X) = \lambda_1 - 2\lambda_2 + (\lambda_2 - 2\lambda_3)X + \lambda_3 X^2,$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 & -2\lambda_2 & & = 0 \\ & \lambda_2 & -2\lambda_3 & = 0 \\ & & \lambda_3 & = 0 \end{array} \right. \iff \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0.$$

3. (a) On calcule : $\varphi(P_1) = 2^2 + 2 = 6$, $\varphi(P_2) = 2^2 - 2 = 2$, $\varphi(P_3) = 2^2 - 1 = 3$, d'où : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
On calcule : $\varphi(Q_1) = 1$, $\varphi(Q_2) = 2 - 2 = 0$, $\varphi(Q_3) = 2^2 - 2 \times 2 = 0$, d'où : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Vu la matrice de φ dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, qui possède exactement une colonne non nulle, le rang de φ vaut 1. L'image de φ est donc un sous-espace de dimension 1 de $\mathbb{R}$: $\mathrm{im}(\varphi) = \mathbb{R}$. Enfin, le noyau de φ est de dimension : $\dim(E) - \mathrm{rg}(\varphi) = 2$; or, (Q_2, Q_3) est une famille libre dans $\ker(\varphi)$ ayant $\dim(\ker \varphi)$ vecteurs, donc c'en est une base.

Exercice II

1. (a) Comme f_2 et f_3 ne sont pas colinéaires, (f_2, f_3) est une famille libre et elle engendre E : d'où $\dim(E) = 2$.

(b) Soit $v = (x, y, z)$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} v \in E &\iff \exists(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^2, \ v = \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 \\ &\iff \exists(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{ccc} 3\lambda_2 & +\lambda_3 & = x \\ 2\lambda_2 & & = y \\ & -\lambda_3 & = z \end{array} \right. \\ &\iff \exists(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{3}{2}y & -z & = x \\ 2\lambda_2 & & = y \\ & -\lambda_3 & = z \end{array} \right. \\ &\iff \frac{3}{2}y - z = x \iff 2x - 3x + 2z = 0. \end{aligned}$$

2. (a) Soit $v = (x, y, z) \in D \cap E$. Comme $v \in D$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda f_1$, c'est-à-dire : $x = 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = -\lambda$. Comme $v \in E$, par 1b, on a : $2x - 3y + 2z = 0$. Par suite : $0 = 4\lambda - 3\lambda - 2\lambda = -\lambda$, puis : $v = \vec{0}$. Ainsi, $D \cap E = \{\vec{0}\}$.
Ensuite, on a : $\dim(D + E) = \dim(D) + \dim(E) - \dim(D \cap E) = 1 + 2 - 0 = \dim \mathbb{R}^3$, si bien que l'on a : $D + E = \mathbb{R}^3$. Au bilan : $D \oplus E = \mathbb{R}^3$.

(b) Comme $\mathbb{R}^3 = D+E = \mathrm{Vect}(f_1)+\mathrm{Vect}(f_2,f_3) = \mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3)$, la famille (f_1,f_2,f_3) est génératrice minimale, donc c'est une base.

3. (a) Comme P est la matrice de passage de la base canonique à la base (f_1,f_2,f_3), elle est inversible. Pour trouver son inverse, on résout le système $X = PX'$ où $X' = (y_1,y_2,y_3)$ est donné et $X = (x_1,x_2,x_3)$ est l'inconnu. [1]

$$
\begin{aligned}
X = PX' \iff & \left\{\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & y_1 \\ x_1 & +2x_2 & & = & y_2 \\ \underline{-x_1} & & -x_3 & = & y_3 \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rrrcrrrl} & +3x_2 & -x_3 & = & y_1 & & +2y_3 & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ & +2x_2 & \underline{-x_3} & = & & y_2 & +y_3 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ -x_1 & & -x_3 & = & & & y_3 & \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rrrcrrrl} & x_2 & & = & y_1 & -y_2 & +y_3 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & +2x_2 & -x_3 & = & & y_2 & +y_3 & L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ -x_1 & & -x_3 & = & & & y_3 & \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{rrrcrrrl} x_1 & & & = & -2y_1 & +3y_2 & -2y_3 & \text{(le système} \\ & x_2 & & = & y_1 & -y_2 & +y_3 & \text{était} \\ & & x_3 & = & 2y_1 & -3y_2 & +y_3, & \text{« triangulaire »)} \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Par le cours (« $X = PX'$ »), on a : $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 & +3x_2 & -2x_3 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3, \end{pmatrix}$.

4. (a) Soient v et v' deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et λ et λ' des réels. On décompose : $v = v_1 + v_0$, $v' = v'_1 + v'_0$ où $v_1, v'_1 \in D$ et $v_0, v'_0 \in E$. Alors : $\lambda v + \lambda' v' = \underbrace{\lambda v_1 + \lambda' v'_1}_{\in D} + \underbrace{\lambda v_0 + \lambda' v'_0}_{\in E}$, d'où $p(\lambda v + \lambda' v') = \lambda v_1 + \lambda' v'_1 = \lambda p(v) + \lambda' p(v')$. Ainsi, p est linéaire et elle va bien de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$: c'est un endomorphisme (un projecteur !).

(b) Pour remplir la j^{e} colonne, on doit calculer les coordonnées de $p(f_j)$ dans la base (f_1,f_2,f_3). On a : $p(f_1) = f_1$ car $f_1 = f_1 + \vec{0}$ où $f_1 \in D$ et $\vec{0} \in E$. On a, si $j \in \{2,3\}$: $p(f_j) = \vec{0}$ car $f_j = \vec{0} + f_j$ avec $\vec{0} \in D$ et $f_j \in E$. D'où : $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) On a, par définition des coordonnées : $v = \underbrace{x'_1 f_1}_{\in D} + \underbrace{x'_2 f_2 + x'_3 f_3}_{\in E}$, d'où : $p(v) = x'_1 f_1$.

5. On a enfin : $p(v) = x'_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2x_1 + 3x_2 - 2x_3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 & +6x_2 & -4x_3 \\ -2x_1 & +3x_2 & -2x_3 \\ 2x_1 & -3x_3 & +2x_3 \end{pmatrix}$,

d'où : $M = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. C'est le pivot qui est souligné.

Commentaires

- Il est conseillé d'écrire à l'encre ou au feutre : c'est bien plus facile de rendre une copie *propre*.
- Compétence n° 0 en calcul : savoir *recopier* sans erreur d'une ligne à l'autre. C'est bête, hein ?
- Compétence n° 0,5 : *contrôler la plausibilité* d'un résultat.
  Ex. : Une fois écrit $X^4 + 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$ (sic), on peut s'amuser à remplacer X par 1 et détecter très vite qu'il y a problème : pas plausible !
- Compétence n° 0,75 en calcul : *ne pas calculer* !
  Ex. : Une fois écrit $\frac{X^3}{X^2+1} = X - \frac{X}{X^2+1}$, on doit *voir* que c'est $X + \frac{aX+b}{X^2+1}$ avec $a = -1$ et $b = 0$.
  Ex. : En II.2(a) et II.2(b), vous avez souvent résolu *deux fois* le même système ?
- Quand un étudiant en mathématiques parle de « dimension d'une famille » ou de « solution d'un polynôme », c'est un peu comme quand un biologiste parle du « bec du chien » ou de « l'aile du lapin » : ça heurte la sensibilité.
- Les notations sont là pour *aider* – à empaqueter des notions complexes dans des symboles compacts. En abuser crée des confusions et des erreurs. Ainsi, par exemple :
  - écrire $\mathbb{R}_3$ au lieu de $\mathbb{R}^3$ laisse une impression de négligence ;
  - écrire $\mathbb{R}[X]$ au lieu de $\mathbb{R}(X)$ quand on manipule des fractions laisse un peu perplexe ;
  - lorsque Q_1 est un polynôme, on *ne peut pas* écrire $Q_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, ça ne veut rien dire !
- De façon générale, chaque fois que vous écrivez un objet, demandez-vous quelle est sa nature : vecteur, matrice, application linéaire, polynôme, fraction, etc. On ne peut pas identifier un vecteur et sa colonne de coordonnées dans une base, sauf si on est dans $\mathbb{R}^n$ et que la base est la base canonique. On écrira donc : « Q_1 a pour coordonnées... dans la base... »
- Erreur beaucoup trop vue : « Les vecteurs Q_1, Q_2 et Q_3 ne sont pas deux à deux proportionnels donc la famille (Q_1, Q_2, Q_3) est libre. » Mais regardez un dessin ! Prenez deux vecteurs e_1 et e_2 non colinéaires et leur somme : $(e_1, e_2, e_1 + e_2)$ n'est pas une famille libre, n'est-ce pas ? On peut négocier ? C'est la dernière fois que vous la faites, OK ?
- Deux erreurs (pourquoi ?) vues : « P_1, P_2 et P_3 sont des combinaisons linéaires de $(1, X, X^2)$ qui est libre donc (P_1, P_2, P_3) est libre. » « Q_1, Q_2 et Q_3 sont des combinaisons linéaires de (P_1, P_2, P_3) qui est génératrice donc (Q_1, Q_2, Q_3) est génératrice. »
- Lorsque l'on écrit la matrice d'une application linéaire, la première chose, c'est *sa taille* ! On la remplit *par colonnes*, il y a une colonne par vecteur de la base de départ, on met les coordonnées des images des vecteur, le nombre de lignes dépend donc de l'espace d'arrivée.
- Au fait, la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas le vecteur $(6, 2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$.
- Pour les changements de base, il y a deux formules à savoir – *par cœur* – à ne pas confondre :
  - pour les *vecteurs* : $X = PX'$;
  - pour les *matrices* : $M = QM'P^{-1}$ (ou $M = PM'P^{-1}$ si on parle d'endomorphismes).

  Ici, X et X' sont les coordonnées d'un vecteur v dans deux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ d'un même espace. D'autre part, M est la matrice d'une application linéaire φ dans des bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$, M' est la matrice de φ dans des bases $\mathbf{e}'$ et $\mathbf{f}'$, $P = P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$ et $Q = P_{\mathbf{f},\mathbf{f}'}$ sont les matrices de passage.
- Une matrice carrée *n'est pas* toujours inversible (pensez à la matrice nulle !).
- Un bon nombre d'entre vous pensent savoir appliquer la *méthode du pivot de Gauss*. Ils se trompent : les résolutions des systèmes 3×3 du contrôle faisaient voir des manipulations un peu au hasard, voire circulaires, bien souvent bien peu efficaces.
- On ne cherche pas l'inverse d'une matrice 3×3 avec un système à 9 inconnues !