Exercice 1
On introduit une application f de $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^2$ vers $\mathbf{C}$ par la formule :

$$f((w_1, z_1), (w_2, z_2)) = \overline{w_1} z_2 + \overline{z_1} w_2.$$

On vérifie alors sans guère de difficulté les trois points suivants :
* f est $\mathbf{C}$-linéaire à droite (vérification on ne peut plus crétine) ;
* f a la propriété de symétrie hermitienne. Calculons en effet :

$$f((w_2, z_2), (w_1, z_1)) = \overline{w_2} z_1 + \overline{z_2} w_1 = \overline{w_2}\,\overline{\overline{z_1}} + \overline{z_2}\,\overline{\overline{w_1}} = \overline{w_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{w_1}} = \overline{f((w_1, z_1), (w_2, z_2))}.$$

* pour tout (w, z) de $\mathbf{C}^2$:

$$f((w, z), (w, z)) = \overline{w} z + \overline{z} w = \overline{\overline{z} w} + \overline{z} w = 2\,\mathcal{R}e(\overline{z} w) = q((w, z)).$$

On conclut que f est une forme sesquilinéaire hermitienne et que q est la forme quadratique hermitienne associée à f.
NB : on peut faire plus court en introduisant la matrice hermitienne :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

puis en explicitant la forme quadratique hermitienne q_1 dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{C}^2$ est H. Ceci s'obtient aussitôt par la formule mattricielle :

$$q_1((w, z)) = (\,\overline{w} \quad \overline{z}\,)\, H \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \overline{w} z + \overline{z} w = \overline{\overline{z} w} + \overline{z} w = 2\,\mathcal{R}e(\overline{z} w) = q((w, z))$$

Puisque $q = q_1$, q est une forme quadratique hermitienne.

Exercice 2

1) Deux méthodes sont possibles : soit on regarde les limites de la fonction polynomiale associée en $\pm\infty$ et on constate qu'elles sont infinies de signes opposé. La fonction polynomiale associée étant par ailleurs continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit son annulation quelque part dans $\mathbf{R}$. Une autre stratégie est de décomposer le polynôme considéré en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbf{R}$. On sait que ces facteurs irréductibles sont soit de degré 1 soit de degré 2. Pour obtenir un degré impair pour leur produit, il n'est pas possible qu'ils soient tous de degré 2 : l'un au moins est donc du premier degré, celui-ci admet alors une racine qui est racine du polynôme étudié.

2) Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme est de degré impair et à coefficients réels. Par la question précédente, il admet au moins une racine réelle. Or on sait que toute racine du polynôme caractéristique est valeur propre : l'endomorphisme admet donc au moins une valeur propre et avec elle au moins une droite de vecteurs propres.

3) Soit α valeur propre de u et x non nul vecteur propre associé. Comme u conserve les distances, $\|x\| = \|u(x\| = \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$. On peut simplifier par $\|x\|$ dans cette relation puisque $x \neq 0$ et cela fournit $|\alpha| = 1$.

4) Question triviale ! 3 est impair donc la question 1b) garantit l'existence d'une valeur propre au moins. Celle-ci est égale à 1 ou -1 via le 2. Mais on a supposé que -1 n'est pas valeur propre.

5) Encore une question triviale ! -1 n'est pas valeur propre, donc y n'est pas vecteur propre pour -1 et ceci alors que $y \neq 0$. C'est donc que $y \neq -u(y)$ qui se regroupe en $y + u(y) \neq 0$.

6) On calcule le produit scalaire :

$$\langle y + u(y) \mid x\rangle = \langle y \mid x\rangle + \langle u(y) \mid x\rangle.$$

Dans cette expression, $\langle y \mid x\rangle$ est nul parce que $y \perp x$ tandis que $\langle u(y) \mid x\rangle = \langle u(y) \mid u(x)\rangle = \langle y \mid x\rangle = 0$ (la première égalité parce que x est propre pour la valeur propre 1, la deuxième parce que u préserve les produits scalaires).
Le calcul pour $y - u(y)$ est presque exactement le même.

7) x n'est pas nul et $y + u(y)$, qui n'est pas nul non plus, lui est perpendiculaire : ces deux vecteurs ne sont donc pas proportionnels. Ces deux vecteurs forment donc une famille libre. Ils engendrent par ailleurs F. On en conclut que la dimension de F est deux.

8) Simple calcul de produits scalaires :

$$\langle y + u(y) \mid y - u(y)\rangle = \langle y \mid y\rangle - \langle u(y) \mid u(y)\rangle = \langle y \mid y\rangle - \langle y \mid y\rangle = 0.$$

(On a utilisé $\|u(y)\| = \|y\|$, qui vient encore de la préservation des longueurs par u).

9) D'une part $u(x) = x$ puisque x est propre pour u et la valeur propre 1, d'autre part $\sigma(x) = x$ puisque x est dans le plan par rapport auquel on effectue la symétrie σ.

Pour y, écrivons $y = \dfrac{1}{2}(y + u(y)) + \dfrac{1}{2}(y - u(y))$. Dans cette décomposition, le premier vecteur est dans F par définition de F ; le second est perpendiculaire à x par la question 5 et perpendiculaire à $y + u(y)$ par la question 7. On a donc ainsi identifié les projections respectives de y sur F et sur son orthogonal. On peut alors calculer :

$$\sigma(y) = \frac{1}{2}(y + u(y)) - \frac{1}{2}(y - u(y)) = u(y).$$

10) a) $\sigma \circ \tau = \sigma \circ (\sigma \circ u) = (\sigma \circ \sigma) \circ u = \mathrm{Id} \circ u = u$.

b) Si τ était égal à l'identité, vu le a) on en déduirait que $\sigma = u$. Mais σ est une symétrie orthogonale par rapport à un plan, donc admet -1 pour valeur propre, ce qu'on a exclu pour u par hypothèse. C'est donc que $\sigma \neq u$ puis que $\tau \neq \mathrm{Id}$.

c) $\tau(x) = \sigma[u(x)] = \sigma[\sigma(x)] = x$. De même, $\tau(y) = y$. L'endomorphisme τ laisse donc fixe le plan P engendré par x et y. Puisqu'il est orthogonal, il laisse aussi fixe la droite orthogonale à ce plan, et sur celle-ci il coïncide nécessairement avec Id ou avec $-\mathrm{Id}$. S'il coïncidait avec Id sur cette droite aussi, il serait égal à Id sur E tout entier. Ce qui a été exclu par la sous-question qui précède. C'est donc que τ est la symétrie orthogonale par rapport à P.