Feuille d'exercices n° 5

CALCUL DIFFÉRENTIEL

I. Dérivées directionnelles et classe $\mathcal{C}^1$

Exercice 1. Étudier l'existence de la dérivée de la fonction $f : (x, y) \longmapsto xy^2$ suivant le vecteur $v = (1, -2)$ au point $a = (2, 1)$. Déterminer sa valeur si elle existe.

Exercice 2. Soit $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $G(x, y, z) = (x \sin y, y \sin x, z)$. Justifier l'existence et calculer $\operatorname{div}(G)$, $\operatorname{rot}(G)$ et $\operatorname{grad} \circ \operatorname{div}(G)$.

Exercice 3. Justifier que les fonctions de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer leur matrices jacobiennes en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$) :

$$f : (x, y) \longmapsto e^{xy}(x + y), \quad g : (x, y, z) \longmapsto xy + yz + zx, \quad h : (x, y) \longmapsto (y \sin x, \cos x).$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais n'est de classe $\mathcal{C}^1$ sur aucun ouvert contenant $(0, 0)$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.
2. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = 3 + \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9}$.

1. Justifier l'existence et donner le développement limité à l'ordre 1 de f en $(-4, 3)$.
2. Donner une valeur approchée de $f(-4.01, 3.01)$.

Exercice 7. Soit $f : (\mathbb{R}_+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x + 5y + x^2(\sqrt{y} + \sqrt{x})$. Déterminer l'ensemble des points où (1) f est continue ; (2) f admet des dérivées partielles ; (3) f est $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant ce point ; (4) f admet des dérivées directionnelles.

II. Fonctions composées

Exercice 8. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définies par $f(x, y) = x^2 - y^2$ et $g(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z)$.

1. Expliciter $h = f \circ g$.
2. Justifier que les fonctions f, g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ et écrire leurs matrices jacobiennes (en un point de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement).
3. Vérifier l'égalité $J_h(x, y, z) = J_f(g(x, y, z)) \times J_g(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
4. Écrire le développement limité de f, g et h à l'ordre 1 à l'origine.

Exercice 9. Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x}, \; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y}.$$

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, on pose $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avec $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[\setminus \{\pm\pi/2, \pi\}$. Notons $g : (r, \theta) \in]0; +\infty[\times \big(]0; 2\pi[\setminus \{\pm\pi/2, \pi\}\big) \longmapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Justifier l'existence et donner l'expression de $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial r}$.

Exercice 10. Soit $\gamma : t \longmapsto (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$ (une application d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$) de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $\gamma(0) = (1, 2)$, et $\gamma'(0) = (3, 4)$. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{xy}$. Justifier la dérivabilité de $f \circ \gamma$ et calculer $(f \circ \gamma)'(0)$.

Exercice 11. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit $f : \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$, justifier l'existence de la quantité $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, et la calculer.

III. $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes

Exercice 12. Soit $k \in \mathbb{R}^\star$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\varphi(x, y) = (x, x + ky)$. Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Exercice 13. (Coordonnées sphériques) Montrer que l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc}]0; +\infty[\times]-\pi; \pi[\times]0; \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \backslash \big(\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}\big) \\ (r, \theta, \varphi) & \longmapsto & (r\cos(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\varphi)) \end{array}$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Exercice 14. Soit $k \in \mathbb{R}^\star$. On cherche les applications $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions du système (S) :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, & k\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \forall y \in \mathbb{R}, & f(0, y) \qquad\qquad = \sin y \end{cases}$$

Pour cela, on substitue à cette relation une relation plus simple portant sur une application F, déduite de f par le changement de variable φ de l'exercice 12. Autrement dit, on considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f = F \circ \varphi$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de f en fonction de celles de F.
3. Vérifier que f est solution de (S) si et seulement si F vérifie (S') :

$$\begin{cases} \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, & \dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v) = 0 \\ \forall v \in \mathbb{R}, & F(0, v) \quad = \sin\left(\dfrac{v}{k}\right) \end{cases}$$

4. Déterminer les solutions de (S').
5. Conclure.

Exercice 15. Soient $D = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0,\ v > 0\big\}$ et l'application $\varphi : D \longrightarrow D$ définie par $\varphi(u, v) = (\sqrt[3]{uv}, v)$.

1. Montrer que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que l'application φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de D dans D.
3. À l'aide du changement de variables $(x, y) = \varphi(u, v)$, résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\forall (x, y) \in D, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4\frac{y^2}{x^2},$$

d'inconnue $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur son image $f(\mathbb{R}^3)$, et que $f(\mathbb{R}^3)$ est un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.

IV. Dérivées partielles d'ordres supérieurs

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0)\ ; \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.
4. Que peut-on en conclure ?

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(x, y) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f possède des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
4. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent à l'origine et les calculer.
5. Peut-on trouver un ouvert (de $\mathbb{R}^2$) contenant $(0, 0)$ sur lequel la fonction f de classe $\mathcal{C}^2$?