Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020

Mathématiques III PMI 23 septembre 2019. Durée : 1 h 30

Devoir n$^{\text{o}}$ 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**
Les exercices sont indépendants.

Partie analyse

Exercice 1. Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{(x+2)\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
2. Étudier l'intégrabilité de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{sh} x - \sin x}{e^{2x}-1}$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2. Étant donnés $a, b \in \mathbf{R}$, on considère la fonction $\varphi_{a,b} :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ définie pour tout $x > 0$ par

$$\varphi_{a,b}(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x} - axe^{-2x}}{x^b}.$$

1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbf{R}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $\varphi_{a,b}$ est intégrable sur $[\varepsilon, +\infty[$.
2. (a) Écrire le développement de $\varphi_{a,b}(x)$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{x^{b-2}}\right)$ lorsque $x \to 0$.

   (b) Étudier l'intégrabilité de $\varphi_{a,b}$ sur $]0,+\infty[$ selon les valeurs de a et b.
3. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ n'est pas convergente.
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-x} - 2e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x + o(1) \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \to 0.$$
5. En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x} - xe^{-2x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \ln 2$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un endomorphisme de E.

1. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que si u est injective alors u est bijective.
2. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que le résultat de la question 1 est faux en général si E est de dimension non finie.

Exercice 4. On se place dans $\mathbb{R}^n$. Soient $b_1 = (1, 0, \ldots, 0, -1)$, $b_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, -1)$, $\ldots$, $b_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1, -1)$ et $b_n = (1, 1, \ldots, 1)$.

1. Montrer que la famille $b_1, \ldots, b_n$ est libre puis que c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

Soient $H = \mathrm{Vect}\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ et $D = \mathrm{Vect}\{b_n\}$.

2. Montrer que $\mathbb{R}^n = H \oplus D$.
3. Déterminer une équation linéaire ou un système d'équations linéaires dont H est l'ensemble des solutions. Faire de même pour D.

Soit u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer la matrice de u dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$.