5.3 Exponentielle d'endomorphisme et de matrice

5.3.1 Généralités et rappels sur les séries de matrices

Pour $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ on pose

$$\|A\|_\infty = \max\{|a_i j| \ ; \ 1 \leq i, j \leq n\}.$$

$\| \ \|_\infty$ est une norme sur $M_n(\mathbb{C})$, i.e. est une application à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que

- $\forall A$, $\|A\|_\infty = 0 \iff A = 0$,
- $\forall A$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda A\|_\infty = |\lambda| \cdot \|A\|_\infty$,
- $\forall A, B$, $\|A + B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$.

Dans la suite on notera $\| \ \|$ au lieu de $\| \ \|_\infty$.

Définition 5.7.

- Une suite (A_k) de $M_n(\mathbb{C})$ est dite convergente si il existe $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $k \geq k_0 \Rightarrow \|A_k - A\| < \varepsilon$.
- Une suite (A_k) est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k, k' \geq k_0$, $\|A_k - A_{k'}\| < \varepsilon$.

Proposition 5.8. Soit une suite (A_k) de $M_n(\mathbb{C})$. Alors elle est de Cauchy si et s. si elle est convergente.

Démonstration. Le sens droite-gauche est classique et le sens direct s'appuie sur la complétude de $\mathbb{C}$. $\square$

Définition 5.9. On se donne une suite (A_k) de $M_n(\mathbb{C})$. On définit la série associée notée $\sum A_k$ comme étant la suite (S_k) de terme général $S_k = \sum_{l=0}^k A_l$.
La série est dite absolument convergente si la série réelle $\sum \|A_k\|$ est convergente.

Exercice 5.10. Une série $\sum A_k$ est absolument convergente si et s. si la suite (croissante) $(\sum_{l=0}^k \|A_l\|)_k$ est bornée si et s. si la suite $(\sum_{l=k}^{+\infty} \|A_l\|)_k$ tend vers 0.

Proposition 5.11. Si $\sum A_k$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T_k = \sum_{l=0}^k \|A_k\|$ et $S_k = \sum_{l=0}^k A_k$.
Par hypothèse, (T_k) converge (dans $\mathbb{R}$) donc elle de Cauchy donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $k, k' \geq k_0$, on a $|T_k - T_{k'}| < \varepsilon$.
Pour $k' \geq k \geq k_0$ on a

$$\|S_{k'} - S_k\| = \| \sum_{l=k+1}^{k'} A_l \| \leq \sum_{l=k+1}^{k} \|A_l\| = T_{k'} - T_k < \varepsilon.$$

Ainsi la suite (S_k) est de Cauchy donc convergente. $\square$

Lemme 5.12. Pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$ et $\|A^k\| \leq n^{k-1}\|A\|^k$.

Démonstration. On note $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = AB = (c_{ij})$. Pour tout i, j,

$$|c_{ij}| = |\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}||b_{kj}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\|\|B\| = n\|A\|\|B\|.$$

Par conséquent, $\|C\| \leq n\|A\|\|B\|$.
La deuxième inégalité s'obtient par récurrence sur k en utilisant la première. $\square$

5.3.2 Exponentielle de matrice

Définition 5.13. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On définit $e^A = \exp(A) \in M_n(\mathbb{C})$ en posant

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Proposition 5.14. La série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge. Ainsi la matrice e^A est bien définie.

Démonstration. Si $A = 0$ c'est trivial. On suppose donc A non nulle. On montre que la série est absolument convergente. En effet

$$\sum_{l=0}^{k} \|\frac{A^l}{l!}\| \leq \sum_{l=0}^{k} \frac{n^{l-1}\|A\|^l}{l!}.$$

Notons $u_l = \frac{n^{l-1}\|A\|^l}{l!}$. Alors $\frac{u_{l+1}}{u_l} = \frac{n\|A\|}{l+1}$ et ceci tend vers 0 quand l tend vers $+\infty$. Par le critère de D'alembert la série $\sum u_l$ est convergente ce qui implique l'absolue convergence de notre série de départ. □

Proposition 5.15. $e^{\lambda \cdot \mathrm{Id}_n} = e^\lambda \cdot \mathrm{Id}_n$.

Démonstration. ok. □

Proposition 5.16. Si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ commutent alors $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^B$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{l!(k-l)!} A^l B^{k-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{A^l}{l!} \cdot \frac{B^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= e^A \cdot e^B. \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.17. Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, la matrice e^A est inversible et son inverse est e^{-A}.

Démonstration. A et $-A$ commutent donc $e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^0 = \mathrm{Id}_n$. □

Proposition 5.18. Soient $A, P \in M_n(\mathbb{C})$ avec P inversible. Alors

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1} e^A P.$$

Démonstration. ok... □

Lemme 5.19. Soit $T \in M_n(\mathbb{C}))$ une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Soit $k \in \mathbb{N}$ alors T^k et e^T sont triangulaires aussi et leurs coefficients diagonaux sont respectivement $\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k$ et $e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}$.

Démonstration. On traite le cas où T est triangulaire supérieure (c'est pareil dans l'autre cas). Le produit de deux matrices triangulaires est donné par (exercice).

$$\begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

Cette formule permet d'avoir le résultat sur A^k par une récurrence sur k.
Concernant le second resultat, on a :

$$e^T = \sum_k \frac{1}{k!} T^k = \sum_k \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} {\alpha_1}^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & {\alpha_n}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k \frac{{\alpha_1}^k}{k!} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_k \frac{{\alpha_n}^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

□

Proposition 5.20. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

Démonstration. On trigonalise $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$. On a alors

$$\det(e^A) = \det(e^{PTP^{-1}}) = \det(Pe^TP^{-1}) = \det(e^T).$$

De plus $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(T) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ donc il suffit de montrer que $\det(e^T) = e^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$.

Par une récurrence facile sur k on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^k = \begin{pmatrix} \alpha_1^k & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^k \end{pmatrix}$. Par conséquent

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum \frac{\alpha_1^k}{k!} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum \frac{\alpha_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

d'où $\det(e^T) = e^{\alpha_1} \cdots e^{\alpha_n} = e^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$. □

5.3.3 Exponentielle d'endomorphisme

On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit u un endomorphisme de E.

Définition 5.21. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = M_{\mathcal{B}}(u)$. On définit $e^u = \exp(u)$ comme l'unique endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est e^A.

Proposition 5.22. Cette définition ne dépend pas du choix d'une base.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et e^u défini comme ci-dessus. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base, soit $A' = M_{\mathcal{B}'}(u)$ et v l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est $e^{A'}$. On veut montrer que $v = e^u$. On a l'existence d'une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = A'$. D'où $e^{A'} = P^{-1}e^AP$. Par conséquent $M_{\mathcal{B}'}(v) = e^{A'} = P^{-1}M_{\mathcal{B}}(e^u)P = M_{\mathcal{B}'}(e^u)$ ce qui montre que $v = e^u$. □

5.4 Systèmes différentiels

5.4.1 Systèmes linéaires homogènes

On s'intéresse ici aux systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordres 1 à coefficients constants, i.e. les systèmes du type

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + \cdots + a_{1n} \cdot x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1} \cdot x_1(t) + a_{n2} \cdot x_2(t) + \cdots + a_{nn} \cdot x_n(t) \end{cases}$$

où les a_{ij} sont dans $\mathbb{C}$ et les inconnues x_i sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ dérivables.
Notons qu'on peut aussi avoir les a_{ij} dans $\mathbb{R}$ et demander aux x_i d'être des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Si on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ alors le système précédent devient équivalent à l'équation

$$X'(t) = A \cdot X(t) \ , \qquad t \in \mathbb{R}$$

où $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$.
C'est cette forme que nous adoptons dans la suite.
Remarquons que toute solution est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 5.23. L'application $\phi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C}), t \mapsto e^{tA}$ est dérivable et $\phi'(t) = Ae^{tA}$.

Démonstration. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{e^{(t_0+h)A} - e^{t_0A}}{h} &= e^{t_0A} \times \frac{e^{hA} - \mathrm{Id}}{h} \\ &= \frac{e^{hA} - \mathrm{Id}}{h} \times e^{t_0A}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{hA} - \mathrm{Id}}{h} &= \frac{1}{h} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{h}(hA + \frac{h^2A^2}{2} + \frac{h^3A^3}{3} + \cdots) \\ &= A + h(\frac{A^2}{2} + \frac{hA^3}{3} + \cdots). \end{aligned}$$

d'où $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(e^{hA} - \mathrm{Id}) = A$. □

Notons

$$\Gamma_{\mathbb{C}} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{C})) \quad \text{et} \quad S_A = \{X \in \Gamma \mid X \text{ est solution de } X'(t) = AX(t), t \in \mathbb{R}\}$$

S_A est donc l'ensemble des solutions.

Proposition 5.24. S_A est un $\mathbb{C}$-sev de Γ

Démonstration. En exercice. □

Remarque 5.25. On s'intéressera aussi à

$$\Gamma_{\mathbb{R}} = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad S_A(\mathbb{R}) = \{X \in \Gamma_{\mathbb{R}} \mid X \text{ est solution de } X'(t) = AX(t), t \in \mathbb{R}\}$$

dans le cas d'une matrice A à coefficients réels. D'ailleurs, en TD, les matrices sont en général dans $M_n(\mathbb{R})$. Mais les résultats qu'on va obtenir à propos de S_A suffiront à l'étude de $S_A(\mathbb{R})$. Dans la suite, on se consacre donc à S_A et on reparlera de $S_A(\mathbb{R})$ plus loin.

Proposition 5.26. Si $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sont semblables alors S_A est isomorphe à S_B.

Démonstration. Supposons que $B = P^{-1}AP$ avec P inversible et $X'(t) = BX(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $X' = P^{-1}APX$. On multiplie par P à gauche et ça donne $PX' = A(PX)$ i.e. $(PX)' = A(PX)$. Ainsi si $X \in S_B$ alors $PX \in S_A$. De façon similaire on montre que si $X \in S_A$ alors $P^{-1}X \in S_B$. Par conséquent l'application $S_B \to S_A, X \mapsto PX$ est linéaire (exercice) et est bijective avec pour inverse l'application $X \mapsto P^{-1}X$. Les espaces S_A et S_B sont donc bien isomorphes. $\square$

Lemme 5.27. Soit $T \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inférieure. Soit $X \in S_T$ qu'on écrit $X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$. Alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ il existe $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{tT} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Dans la suite on notera a_{ij} les coefficients de la matrice T. Notons que la forme triangulaire inférieure de la matrice fait que notre système va avoir la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \\ x_3'(t) = a_{31}x_1(t) + a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t) \\ \vdots \end{cases}$$

On va faire la preuve par récurrence sur k. On traite d'abord le cas $k = 1$.
On a donc $x_1'(t) = a_{11}x_1(t)$. On connaît la solution générale d'une telle équation et on a donc l'existence de $c_1 \in \mathbb{C}$ tel pour tout t, $x_1(t) = c_1 e^{ta_{11}}$.
D'autre part

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{tT} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ta_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ta_{11}}c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent le résultat est vrai pour $k = 1$.
On le suppose vraie pour un $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
On a

$$(E) \qquad x_{k+1}'(t) = \underbrace{a_{k+1,1}x_1(t) + \cdots + a_{k+1,k}x_k(t)}_{b(t)} + a_{k+1,k+1}x_{k+1}(t).$$

Notons que l'hypothèse de récurrence nous donne une expression de $x_1, \ldots, x_k$ en fonction de certains $c_1, \ldots, c_k$ ainsi l'équation (E) peut se réécrire sous la forme

$$z'(t) = a_{k+1,k+1} z(t) + b(t)$$

et b est fixée par l'hypothèse de récurrence.
Notons (H) l'équation homogène associée : $z'(t) = a_{k+1,k+1} z(t)$. L'équation (H) a pour solution générale

$$z(t) = c_{k+1} e^{t a_{k+1,k+1}}$$

où $c_{k+1} \in \mathbb{C}$. Nous allons déterminer une solution particulière de (E) ce qui donnera la solution générale de (E).

Pour cela on introduit quelques notations. Pour $t \in \mathbb{R}$, on notera $C(t) = e^{tT} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Remarquons que $C'(t) = TC(t)$ et l'hypothèse de récurrence devient $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

De plus, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on notera $L_j = (0 \cdots 0 \; 1 \; 0 \cdots 0) \in M_{1\times n}(\mathbb{C})$ la matrice ligne où le 1 est en position j. On remarque alors qu'étant donnée une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, on a $L_j \cdot M \in M_{1\times n}(\mathbb{C})$ et c'est la ligne j de M.
Soit y définie par

$$y(t) = L_{k+1} \cdot C(t).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
y'(t) &= L_{k+1} \cdot T \cdot C(t) \\
&= \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot C(t) \\
&= \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix} \right] \cdot C(t) \\
&= \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot C(t) \\
&\quad + \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix} \cdot C(t)
\end{aligned}$$

Notons α et β les deux termes obtenus. Le premier terme est

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{k+1,1} x_1(t) + \cdots a_{k+1,k} x_k(t).$$

Le deuxième terme est

$$\beta = \sum_{j=1}^{k+1} a_{k+1,j} L_j \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix} \cdot C(t).$$

Or on a dit plus haut que $L_j \cdot M$ est la ligne j de M. Ici on constate que si $j \leq k$, ça donne 0 et donc seul le terme $L_{k+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$ subsiste et de plus $L_{k+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix} = L_{k+1}$ (car c'est la ligne $k+1$ de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$). Par conséquent

$$\beta = a_{k+1,k+1} L_{k+1} C(t) = a_{k+1,k+1} y(t).$$

Finalement on a

$$y'(t) = \alpha + \beta = a_{k+1,1} x_1(t) + \cdots a_{k+1,k} x_k(t) + a_{k+1,k+1} y(t)$$

ce qui signifie que y est bien une solution particulière de l'équation (E). Par conséquent x_{k+1} s'écrit sous la forme

$$x_{k+1}(t) = c_{k+1} e^{t a_{k+1,k+1}} + y(t).$$

Il nous reste à vérifier l'égalité voulue (au rang $k+1$) avec $c_1, \ldots, c_{k+1}$. Avant ça, quelques remarques et quelques notations.

— Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ et $p \in \{1, \ldots, n\}$. Alors $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & \cdots & m_{pn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

— La matrice e^{tT} est triangulaire inférieure comme T (en effet, $e^{tT} = \sum (tT)^l/(l!)$ et une puissance d'une matrice triangulaire est triangulaire de la même forme). De plus étant donnée une matrice triangulaire S dont les éléments diagonaux sont $s_1, \ldots, s_n$, la matrice e^S est triangulaire et ses éléments diagonaux seront $e^{s_1}, \ldots e^{s_n}$.

— Pour $p = 1, \ldots, n$ on notera $E_p \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice contenant un 1 en position (p,p) et des 0 partout ailleurs.

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_{k+1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot e^{tT}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_k\\ c_{k+1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \Big[\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+E_{k+1}\Big]e^{tT}\cdot\Big[\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ c_{k+1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Big]$$

$$= \begin{pmatrix}\mathrm{Id}_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot e^{tT}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+E_{k+1}\cdot e^{tT}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot e^{tT}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ c_{k+1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+E_{k+1}\cdot e^{tT}\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ c_{k+1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

. Notons, dans l'ordre, X_1, X_2, X_3, X_4 les quatre termes qui apparaissent. On a $Y_1 = \begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_k(t)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. Pour Y_2 on reconnait dans E_{k+1} une matrice dont la ligne d'indice $k+1$ est L_{k+1} or $L_{k+1}C(t) = y(t)$ donc $Y_2 = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ y(t)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ avec $y(t)$ placé en position $k+1$.

Concernant Y_3, e^{tT} est triangulaire inférieure et $\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot e^{tT}$ est égal (d'après les remarques ci-dessus) à la matrice issue de etT dans laquelle on n'a gardé que les k premières lignes ce qui entraine que le produit avec le vecteur colonne contenant c_{k+1} en position $k+1$ est nul, i.e. $Y_3 = 0$.
Le produit $L_{k+1}\cdot M$ est une matrice ligne et c'est la ligne $k+1$ de M, on constate comme pour Y_2 que $E_{k+1}\cdot e^{tT}$ est une matrice dont la seule ligne non nulle est la ligne $k+1$ et cette ligne est égale à $L_{k+1}\cdot e^{tT}$. D'autre part la ligne $k+1$ de e^{tT} est de la forme $(\star\ \cdots\ \star\ e^{ta_{k+1,k+1}}\ 0\ \cdots\ 0)$ (voir les remarques

ci-dessus sur l'exponentielle d'une matrice triangulaire). Par conséquent $Y_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{k+1}e^{ta_{k+1,k+1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

On obtient finalement $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{k+1}e^{ta_{k+1,k+1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ x_{k+1}(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. □

Corollaire 5.28. Avec les mêmes hypothèses que dans le lemme, on a $\dim_{\mathbb{C}}(T) \leq n$.

Démonstration. Soit $X \in S_T$ alors, d'après le lemme, il existe $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = e^{tT} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Notons $C_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ avec le 1 placé en position i. Alors $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n c_i C_i$. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$X(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{tT} \cdot C_i = \sum_{i=1}^n c_i \phi(t).$$

Pour tout $i = 1, \dots, n$, notons $\phi_i : t \mapsto e^{tT} \cdot C_i$. D'une part $\phi_i'(t) = Te^{tT}C_i = T\phi_i$ donc $\phi_i \in S_T$. D'autre part l'égalité ci-dessus montre que X est une combinaison linéaire des ϕ_i qui sont donc générateurs de S_T. Ainsi $\dim(S_T) \leq n$. □

Théorème 5.29. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ alors $\dim_{\mathbb{C}}(S_A) = n$ et

$$S_A = \{t \mapsto e^{tA} \cdot X_0 \mid X_0 \in M_n(\mathbb{C})\}.$$

De plus si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors $\dim(S_A(\mathbb{R})) = n$ et

$$S_A(\mathbb{R}) = \{t \mapsto e^{tA} \cdot X_0 \mid X_0 \in M_n(\mathbb{R})\}.$$

Démonstration. D'abord avec $A \in M_n(\mathbb{C})$. La matrice est trigonalisable et semblable à une certaine matrice triangulaire inférieure $T \in M_n(\mathbb{C})$ donc $\dim(S_A) = \dim(S_T) \leq n$ d'après le corollaire précédent. Notons comme précédemment $C_i \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ la matrice colonne avec un 1 en position i et soit $\phi : t \mapsto e^{tA} \cdot C_i$. Alors pour tout t, $\phi_i'(t) = A\phi_i(t)$ i.e. $\phi \in S_A$.
Montrons que la famille $\phi_1, \dots, \phi_n$ est libre dans S_A ; comme $\dim(S_A) \leq n$, cette famille sera alors une base de S_A.
Soient alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_1^n \lambda_i \phi_i = 0$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(\sum_1^n \lambda_i \phi_i)(t) = \sum_1^n \lambda_i \phi_i(t) = 0$. On évalue en $t = 0$ sachant que $\phi_i(0) = e^{0\times A} \cdot C_i = \mathrm{Id}_n \cdot C_i = C_i$ et on obtient $\sum_{i=1}^n \lambda_i C_i$. Or les C_i

sont linéairement indépendant donc les λ_i sont tous nuls.
Ainsi S_A a pour base $\phi_1, \ldots, \phi_n$, i.e.

$$\begin{aligned}
S_A &= \{\phi \in \Gamma \mid \exists (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n,\ \phi(t) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(t)\} \\
&= \{\phi \in \Gamma \mid \exists (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n,\ \phi(t) = \sum_{i=1}^n e^{tA} c_i C_i\} \\
&= \{\phi \in \Gamma \mid \exists (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n,\ \phi(t) = \sum_{i=1}^n e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\} \\
&= \{\phi \in \Gamma \mid \exists X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{C}),\ \phi(t) = \sum_{i=1}^n e^{tA} \cdot X_0\}.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $A \in M_n(\mathbb{R})$.
Si ϕ est une fonction de la forme $\phi(t) = e^{tA} \cdot X_0$ avec $X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ alors $\phi'(t) = A\phi(t)$ i.e. $\phi \in S_A(\mathbb{R})$ ce qui montre l'inclusion $\{t \mapsto e^{tA} \cdot X_0 \mid X_0 \in M_n(\mathbb{R})\} \subseteq S_A(\mathbb{R})$. Voyons l'inclusion inverse. Soit $\phi \in S_A(\mathbb{R})$ alors $\phi \in S_A$ donc il existe $Z_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ tel que $\phi(t) = e^{tA} Z_0$. Écrivons $Z_0 = X_0 + iY_0$ avec $X_0, Y_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Alors l'égalité, pour tout $t \in \mathbb{R}$, suivante : $\phi(t) = e^{tA} X_0 + ie^{tA} Y_0$ implique que $e^{tA} Y_0 = 0$ pour tout t. En prenant $t = 0$ cela donne $Y_0 = 0$, i.e. $Z_0 = X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.
On a bien l'égalité $S_A(\mathbb{R}) = \{t \mapsto e^{tA} \cdot X_0 \mid X_0 \in M_n(\mathbb{R})\}$. Il reste à voir que $\dim_{\mathbb{R}}(S_A(\mathbb{R})) = n$. On reprend les notations précédentes avec C_i et ϕ_i. La démonstration dans le cas complexe montre que la famille des ϕ_i est linéairement indépendante sur $\mathbb{C}$ donc sur $\mathbb{R}$. De plus, si $\phi(t) = e^{tA} X_0$ avec $X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ alors X_0 se décompose sous la forme $X_0 = \sum c_i C_i$ avec $c_i \in \mathbb{R}$ ce qui donne $\phi(t) = \sum c_i \phi_i(t)$. Ainsi la famille des ϕ_i est génératrice de $S_A(\mathbb{R})$. On a donc une base de cardinal n. □

Corollaire 5.30. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Soient $t_0 in \mathbb{R}$ et $X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Alors il existe une unique solution à l'équation $X'(t) = AX(t)$ telle que $X(t_0) = X_0$.
On a un résultat similaire avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, $X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Démonstration. On fait la preuve dans le cas complexe uniquement. Voyons l'unicité. Soient X et Y deux telles solutions. Il existe $C, C' \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ tels que pour tout t, $X(t) = e^{tA} C$ et $Y(t) = e^{tA} C'$. En $t = t_0$ cela donne : $e^{t_0 A} C = e^{t_0 A} C'$. Mais on sait que $e^{t_0 A}$ est inversible (d'inverse $e^{-t_0 A}$) d'où $C = C'$ ce qui implique $X = Y$.
Voyons l'existence. On définit $X(t) = e^{(t-t_0)A} X_0$ qu'on peut écrire aussi $X(t) = e^{tA} \cdot (e^{-t_0 A} X_0)$. Ainsi X est bien solution de $X' = AX$. De plus $X(t_0) = \mathrm{Id}_n X_0 = X_0$. □

5.4.2 Systèmes linéaires avec second membre

Dans cette partie, on s'intéresse aux système du type

$$(E) \qquad X'(t) = A \cdot X(t) + V(t),\ t \in \mathbb{R}$$

où $A \in M_n(\mathbb{C})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $V(t) \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ et V est continue.
Une telle équation possède son équation homogène associée :

$$(H) \qquad X'(t) = A \cdot X(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Théorème 5.31. Soit Y une solution particulière de (E). Soit $X \in \Gamma$. Alors X est solution de (E) si et s. si il existe $X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = e^{tA}X_0 + Y(t)$.
On a un résultat similaire dans le cas où $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Autrement dit, on retrouve le résultat déjà vu dans le cas d'une seule équation linéaire qui dit "La solution générale de (E) est égale à la solution générale de (H) + une solution particulière de (E)".

Démonstration. Soit $X \in \Gamma$. Notons $Z = X - Y$. On a alors

$$Z' = AZ \iff X' - Y' = A(X - Y) \iff X' = AX + Y' - AY \iff X' = AX + V.$$

Ainsi X est solution de (E) si et s. si il existe $X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ tel que $Z = X - Y = e^{tA}X_0$. □

<u>Recherche d'une solution particulière : variation de la constante.</u>
On s'intéresse toujours à l'équation suivante

$$(E) \qquad X'(t) = A \cdot X(t) + V(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

L'équation homogène associée a pour solution générale : $X(t) = e^{tA}X_0$ pour un certain $X_0 \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$.
Pour trouver une solution particulière de (E) on va faire "varier" la constante X_0. Autrement on cherche une solution Y de (E) sous la forme

$$Y(t) = e^{tA}Y_0(t)$$

avec pour tout t, $Y_0(t) \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$.
On a $Y'(t) = Ae^{tA}Y_0(t) + e^{tA}Y_0'(t)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} Y \text{ est sol. de } (E) &\iff Ae^{tA}Y_0(t) + e^{tA}Y_0'(t) = Ae^{tA}Y_0(t) + V(t) \\ &\iff e^{tA}Y_0'(t) = V(t) \\ &\iff Y_0'(t) = e^{-tA}V(t). \end{aligned}$$

On doit trouver une primitive de $e^{-tA}V(t)$ qu'on notera donc Y_0. Une fois cette primitive calculée on pourra appliquer le théorème précédent.

Remarque 5.32. En pratique, si V a une forme simple (par exemple polynomiale) alors il est souvent plus rapide de chercher directement une solution particulière de la même forme que V

5.4.3 Équation linéaire d'ordre n à coefficients constants

On note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Ce petit paragraphe est consacré à une équation du type :

$$(E) \qquad x^{(n)}(t) + c_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + c_1x'(t) + c_0x(t) = b(t),\ t \in \mathbb{R}$$

où l'inconnue x est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, les c_i sont des éléments de $\mathbb{K}$ et b est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

Soit $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$.

On a alors l'équivalence suivante (en exercice)

$$x \text{ est solution de } (E) \iff \forall\, t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A \cdot X(t) + V(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

On est donc ramené à un système matricielle comme dans le paragraphe précédent.

Proposition 5.33. Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0.$$

Démonstration. On remarque (voir prop. 4.36) que A est la transposée de la matrice compagnon du polynôme $P = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0$. Par conséquent $P = P_{{}^tA} = P_A$. □

5.4.4 Calculs pratiques et exemples

Proposition 5.34. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ (ou $M_n(\mathbb{R})$). Écrivons $A = D + N$ (Dunford) avec $D = \sum_{i=1}^p \lambda_i \Pi_i$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{tA} = e^{tD}e^{tN} \qquad \text{et} \qquad e^{tD} = e^{t\lambda_1}\Pi_1 + \cdots + e^{t\lambda_p}\Pi_p.$$

Démonstration. $e^{tA} = e^{tD+tN} = e^{tD}e^{tN}$ (car tD et tN commutent).

$$\begin{aligned} e^{tD} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1\Pi_1 + \cdots + t\lambda_p\Pi_p)^k}{k!} \\ &= \sum_k \sum_{i=1}^p \frac{(t\lambda_i)^k}{k!}\Pi_i \\ &= \sum_{i=1}^p (\sum_{k\geq 0} \frac{(t\lambda_i)^k}{k!})\Pi_i \\ &= \sum_{i=1}^p e^{t\lambda_i}\Pi_i. \end{aligned}$$

□

Remarque 5.35. $e^{tN} = \mathrm{Id}_n + tN + \frac{(tN)^2}{2} + \frac{(tN)^3}{3!} + \cdots$. Or N est nilpotente donc cette série comporte au plus $n+1$ termes (car $N^n = 0$).

Dans le cas où A est diagonalisable on a un autre résultat pour calculer e^{tA}.

Proposition 5.36. Si $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ alors

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Démonstration. C'est une application directe de la prop. 6.18. $\square$

Exemple 5.37. 1. On s'intéresse au système $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ avec la condition initiale $X(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dans $\det(AX - I)$ on fait $C_1 - C_2$, on trouve $\mathrm{Spec}(A) = \{2, -1\}$ avec 2 de multiplicité 2.
On constate que $A - 2I$ est de rang 1 donc A n'est pas diag.
$P_A = (X-2)^2(X-1)$. On trouve $1 = \frac{1}{9}(X-2)^2 - \frac{X-5}{9}(X+1)$.
D'où $\Pi_{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
$D = 2\Pi_2 - \Pi_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = A - D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$.
On obtient

$$e^{tA} = e^{tD}e^{tN} = (e^{2t}\Pi_2 + e^{-t}\Pi_{-1})(\mathrm{Id}_n + N) = \begin{pmatrix} (2-t)e^2t - e^{-t} & (t-1)e^{2t} + e^{-t} & -e^{2t} + e^{-t} \\ (1-t)e^2t - e^{-t} & te^{2t} + e^{-t} & -e^{2t} + e^{-t} \\ e^{2t} - e^{-t} & -e^{2t} + e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$X(t) = e^{(t-1)A} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-4)e^{2t-2} + 3e^{-t+1} \\ (t-3)e^{2t-2} + 3e^{-t+1} \\ -e^{2t-2} + 3e^{-t+1} \end{pmatrix}.$$

2. On présente une variante du même problème avec une trigonalisation. On trouve $\ker(A + I) = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Notons v_{-1} ce vecteur.

$A - 2I = ...$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

et $(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -9 & 9 & 9 \\ -9 & 9 & 9 \\ -9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$. On obtient $F_2 = \mathrm{Vect}\{v_2, w_2\}$ avec $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On sait que $(A-2I)w_2 \in E_2$ et on trouve $(A-2I)w_2 = v_2$ donc $Aw_2 = v_2 + 2w_2$. D'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Après calcul on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On pose obtient $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
On a $e^{tA} = Pe^{tT}P^{-1}$.
On décompose $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et ces deux matrices commutent. Par conséquent $e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Finalement $e^{tA} = Pe^{tT}P^{-1} = \ldots$.

6 Complément (sans démonstrations) : Réduction de Jordan

Ce mini chapitre est hors programme. Je le donne ici pour les étudiants qui poursuivront en L3 math générale.
Ici $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On fixe une entier positif n.

Définition 6.1. Étant donnés $k \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Si $k = 1$, on pose $J_k(\lambda) = (\lambda)$.
Une telle matrice est appelée bloc de Jordan de taille k associé à λ.

Remarque 6.2. Soit $A = J_k(\lambda)$. Alors $P_A = (X - \lambda)^k$, $m_A = (X - \lambda)^k$ et $\dim(E_\lambda^A) = 1$.

Théorème 6.3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice trigonalisable. Alors il existe une matrice J ayant les propriétés suivantes :
- la matrice J est semblable à A,
- la matrice J est diagonale par blocs et chaque bloc est un bloc de Jordan du type $J_k(\lambda)$ où λ est une valeur propre de A.

De plus, une telle matrice J est unique à l'ordre près de ses blocs.

Remarque 6.4.
1. Si A est diagonalisable alors J est diagonale (les blocs sont tous de taille 1). Dans tous les cas, J est triangulaire supérieure.
2. Il peut y avoir plusieurs blocs avec la même valeur propre (voir remarque suivante).
3. Pour une valeur propre donnée λ, le nombre de blocs associés à λ est égal à la multiplicité géométrique de λ (i.e. la dimension de $\ker(A - \lambda \mathrm{Id}_n)$).
4. Pour une valeur propre donnée λ, la taille du plus grand bloc associé à λ est égal à la multiplicité de λ dans le polynôme minimal m_A.
5. Pour une valeur propre donnée λ, la somme des tailles des blocs de Jordan associés à λ est égale à la multiplicité algébrique de λ (sa multiplicité dans le polynôme caractéristique P_A).