Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019

Mathématiques III PMI 15 octobre 2018. Durée : 1 h 30

Devoir n$^{\text{o}}$ 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**

Les exercices sont indépendants.

Partie algèbre

Exercice 1. Calculer, pour tout $n \geqslant 2$, le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2. Pour $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbf{R}$, on définit

$$M = \begin{pmatrix} x+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & x+2 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & x+3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & x+n \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\det M = x^{n-1}\left(x + \dfrac{n(n+1)}{2}\right)$.
2. Déterminer le rang de M en fonction des valeurs de x.

Exercice 3. Soient un entier $n \geqslant 2$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad \det(A+M) = \det A + \det M.$$

1. Montrer que $\det A = 0$.
2. On note C la première colonne de A. En supposant que $C \neq 0$, montrer qu'il existe une matrice (carrée et de taille n) inversible ayant $-C$ comme première colonne.
3. En déduire que $A = 0$.

Partie analyse

Exercice 4. Déterminer la nature des séries numériques suivantes (préciser si la série est absolument convergente, semi-convergente, divergente, grossièrement divergente) :

a. $\sum_{n\geq 1} \ln\Big(1 - \dfrac{1}{n^2}\Big)$,

b. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{e^n}{n^{\ln(n)}}$,

c. $\sum_{n\geq 0} n^2 \tan\Big(\dfrac{\pi}{2^n}\Big)$,

d. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n+\sin(n)}$.

Exercice 5. Discuter, suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$, la convergence de la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1}\Big(e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}\Big).$$

Exercice 6. Soit $v_n = \ln(n!)$ pour tout $n \geq 2$.

1. a) Écrire $\ln(n!)$ à l'aide d'une somme finie.
   b) En comparant, pour k entier non nul, $\ln(k)$ à $\int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$, établir que $v_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$.
2. La série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{v_n}$ est-elle convergente ?