Devoir n° 1 — Corrigé de la partie Algèbre

Exercice 1. Commençons par calculer le polynôme caractéristique de M. En développant par rapport à la deuxième ligne, on a

$$P_M(X) = \begin{vmatrix} X+2 & -1 & -1 \\ 0 & X+2 & 0 \\ 6 & -3 & X-3 \end{vmatrix} = (X+2)\begin{vmatrix} X+2 & -1 \\ 6 & X-3 \end{vmatrix}$$

Le déterminant 2×2 qui apparaît vaut $(X+2)(X-3)+6 = X^2 - X = X(X-1)$, de sorte que

$$P_M(X) = X(X-1)(X+2).$$

La matrice M, qui est de taille 3×3, possède donc les trois valeurs propres distinctes et est par conséquent diagonalisable. Ces valeurs propres sont 0, 1 et -2. Pour trouver P, cherchons une base de chacun des sous-espaces propres. Soit donc $\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Alors :

$$\xi \in E_0 \iff M\xi = 0 \iff \begin{cases} -2x + 3y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ -6x + 3y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ -2x + z = 0 \\ -6x + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2x \\ y = 0 \end{cases},$$

ce qui montre que $E_0 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même :

$$\xi \in E_1 \iff M\xi = \xi \iff \begin{cases} -3x + 3y + z = 0 \\ -3y = 0 \\ -6x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ -3x + z = 0 \\ -6x + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 3x \\ y = 0 \end{cases}$$

et donc $E_1 = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Enfin,

$$\xi \in E_{-2} \iff M\xi = -2\xi \iff \begin{cases} 3y + z = 0 \\ +0 = 0 \\ -6x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -3y \\ -6x = 12y \end{cases} \iff \begin{cases} z = -3y \\ x = -2y \end{cases},$$

d'où $E_{-2} = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Définissons maintenant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à la base formée des vecteurs propres mis en évidence à l'instant : on sait alors que $M = PDP^{-1}$.

Exercice 2. 1. En effectuant un développement par rapport à la première ligne, on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} X+1 & 0 & -\alpha - 1 \\ -1 & X+2 & 0 \\ 1 & -1 & X-\alpha \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} X+2 & 0 \\ -1 & X-\alpha \end{vmatrix} - (\alpha+1)\begin{vmatrix} -1 & X+2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant 2×2 est égal à $(X+2)(X-\alpha) = X^2 + (2-\alpha)X - 2\alpha$ et le second est égal à $-(X+1)$. On a donc

$$P_A(X) = (X+1)\left(X^2 + (2-\alpha)X - 2\alpha + \alpha + 1\right) = (X+1)(X^2 + (2-\alpha)X + 1 - \alpha).$$

Or, le discriminant du facteur quadratique est égal à $\Delta = (2-\alpha)^2 - 4(1-\alpha) = \alpha^2$, de sorte que ses racines sont $\dfrac{\alpha - 2 + \alpha}{2} = \alpha - 1$ et $\dfrac{\alpha - 2 - \alpha}{2} = -1$. On en déduit finalement que

$$P_A(X) = (X+1)(X+1)(X - (\alpha - 1) = (X+1)^2(X - (\alpha - 1)).$$

2. Si $\alpha - 1 \neq -1$, c'est-à-dire si $\alpha \neq 0$, alors on voit que A possède deux valeurs propres : ce sont -1 avec multiplicité 2 et $\alpha - 1$ avec multiplicité 1.
En revanche, si $\alpha - 1 = -1$, c'est-à-dire si $\alpha = 0$, alors $P_A(X) = (X+1)^3$ et donc A possède une seule valeur propre : c'est -1 avec multiplicité 3.

3. Remarquons déjà que si $\alpha = 0$, alors A n'est pas diagonalisable. En effet, si elle l'était, il existerait P inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot (-I_3) \cdot P^{-1} = -I_3 \cdot PP^{-1} = -I_3,$$

ce qui est absurde.
Supposons donc $\alpha \neq 0$. D'après la question précédente, $\alpha - 1$ est valeur propre simple, donc le sous-espace propre $E_{\alpha-1}$ est nécessairement de dimension 1. Cherchons la dimension de E_{-1} :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x \qquad + (\alpha+1)z = -x \\ \;\; x - 2y \qquad\qquad = -y \\ -x + \;\; y + \qquad \alpha z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, si $\alpha + 1 \neq 0$, alors ce système équivaut à $\begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$, de sorte que l'espace E_{-1} est de dimension 1. En revanche, si $\alpha + 1 = 0$, le système est équivalent à $x = y$, ce qui montre qu'alors E_{-1} est de dimension 2.
Comme -1 est de multiplicité 2 dans le polynôme caractéristique, cela montre que A est diagonalisable si et seulement si $\alpha + 1 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha = -1$.

4. (a) Le polynôme P_M étant scindé, on sait que le déterminant de A est égal au produit des valeurs propres. On a donc $\det A = -2$. Or, s'il existait B réelle telle que $B^2 = A$, on aurait $\det A = (\det B)^2$, ce qui est impossible avec $\det B \in \mathbf{R}$ et $\det A < 0$.

4. (b) Comme on suppose $\alpha = -1$, on sait que A est diagonalisable et on a vu que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, \alpha - 1\} = \{-1, -2\}$, avec -1 de multiplicité 2. Supposons avoir calculé P inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On voit alors que si on pose

$$C = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt[3]{2} \end{pmatrix} P^{-1},$$

alors on a

$$C^3 = P \begin{pmatrix} (-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & (-\sqrt[3]{2})^3 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} = A.$$

Pour calculer explicitement C, on pourrait donc calculer P avec la méthode habituelle, en déduire P^{-1} avec la méthode du pivot et en déduire le produit $P \cdot \mathrm{diag}(-1, -1, -2) \cdot P^{-1}$, qui serait une matrice C comme demandé.