
Devoir surveillé n° 3

Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené-e à prendre.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum global.

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(x) dx.$

2. $J = \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + x + 1} dx.$

3. $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin(x)}{\cos(x) + \cos^2(x) \sin(x)} dx.$

Indication : On pourra utiliser le changement de variable $u = \tan(x)$.

Exercice 3

1. Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}.$

- (a) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^{+*} , et déterminer sa dérivée g' .
- (b) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ , et calculer $g'(0)$.
- (c) Déterminer la limite en $+\infty$ de g .
- (d) Dresser le tableau de variations de la fonction g .
- (e) Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}^+$ tel que $g(m) = 0$.
- (f) Donner, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, le signe de $g(x)$.

2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\ln(x)}{1 + x^2} \end{cases}.$

- (a) Justifier que f est dérivable, et déterminer sa dérivée f' .
- (b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- (c) Dresser le tableau de variations de f .
- (d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f .