Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2016-2017
Cursus préparatoire — Fondamentaux des mathématiques 2 1$^{\text{er}}$ février 2017

Devoir surveillé n° 1
Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les réponses aux exercices doivent donc être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Enfin, si vous pensez avoir repéré une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené·e à prendre.

Exercice 1
En utilisant la méthode du pivot de Gauss, calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1. On note f, g et h les trois fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies par
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = x^2 - 1 \quad ; \quad g(x) = x - 1 \quad ; \quad h(x) = x^2 + x + 1.$$
Montrer que la famille (f, g, h) est libre.
2. La famille $\big((1,2,-1),(4,-7,11),(2,-1,3)\big)$, formée de vecteurs de $\mathbf{R}^3$, est-elle libre ou liée ? Justifiez votre réponse.

Exercice 3

Pour cet exercice, on rappelle que $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.
On considère $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \ : \ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que I_3, J et J^2 sont des éléments de E.
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.
3. Montrer que la famille (I_3, J, J^2) est une base de E.

Exercice 4
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire que A est inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de I_3, A et A^2.
Indication — Pour cette question ainsi que la suivante, on pourra utiliser la propriété suivante : si B et C sont deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $BC = CB$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$(B + C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k C^{n-k}.$$
3. Calculer A^n pour tout entier $n \geqslant 2$.