
Feuille d'exercices n° 6

GÉOMÉTRIE AFFINE

Exercice 1. Soit $R = (0, i, j, k)$ un repère d'un espace affine (de dimension 3). Soient A et B les points de coordonnées respectives $(0, -1, 2)$ et $(1, 1, 1)$ dans ce repère. On note R_1 le repère (A, i, j, k) et R_2 le repère $(B, -k, -i, j)$. Exprimer les coordonnées d'un point M dans le repère R_2 en fonction de celles dans le repère R_1 .

Exercice 2. Dans un plan euclidien muni d'un repère (O, i, j) , on considère le triangle ABC limité par les trois droites d'équations respectives $2x - y + 3 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ et $2x + y - 2 = 0$. Déterminer l'ensemble des points du plan dont les trois projections orthogonales sur ces droites sont alignées.

Exercice 3. On considère la similitude directe s d'écriture complexe, dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$:

$$z' = (i - 1)z + 2 - i.$$

1. Déterminer son centre, son rapport et son angle.
2. On considère dans le plan complexe les points A d'affixe i , B d'affixe -1 et C d'affixe $-i$.
 - (a) Déterminer les points A' , B' et C' , images respectives de A , B et C par la similitude s .
 - (b) Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{A'B'C'}$? de la longueur $A'C'$? de l'aire du triangle $A'B'C'$?

Exercice 4. Dans un plan affine euclidien, soit quatre points A, B, A' et B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Montrer qu'il existe une et une seule similitude directe qui envoie A sur A' et B sur B' :

1. en utilisant des nombres complexes.
2. sans nombres complexes, en commençant par traiter le cas où $A = A'$ puis en s'y ramenant.

Exercice 5. On considère la transformation d'un espace affine euclidien de dimension 3 dont l'expression analytique dans un repère orthonormé est :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z + 1 \\ z' = x - 1. \end{cases}$$

La décrire géométriquement.

Exercice 6. Soit (E, \vec{E}) un espace euclidien. Soient $A, B \in E$ deux points distincts. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que $(AM) \perp (BM)$. On pensera à utiliser le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 7. Soient \vec{E} et \vec{F} deux espaces vectoriels, $u : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$ une application linéaire et $y_0 \in \vec{F}$. Montrer que l'ensemble (s'il n'est pas vide) des $x \in \vec{E}$ tels que $u(x) = y_0$ est un espace affine dont on donnera la direction.

Exercice 8. Soit (E, \vec{E}) un espace affine euclidien.

1. Soit \vec{H} un sous-espace vectoriel de \vec{E} . Montrer que \vec{H} est un hyperplan si et s. si il existe $v \in E \setminus \{0\}$ tel que $\vec{H} = \{x \in E \mid \langle x, v \rangle = 0\}$.
2. Soit H un sous-espace affine de E . Montrer que H est un hyperplan si et s. si il existe $O \in H$ et il existe $A \in E \setminus H$ tel que $H = \{M \in E \mid (OM) \perp (OA)\}$.

Exercice 9. Soit (E, \vec{E}) un espace affine euclidien. Soient A et B deux points de E . Montrer que l'ensemble des points M équidistants de A et B est l'hyperplan affine $H = I + (\text{Vect}\{\overrightarrow{AB}\})^\perp$ où I est le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 10. Soient (E, \vec{E}) un espace affine de dimension finie sur \mathbb{R} et $f : E \rightarrow E$ une application affine.

1. Montrer que si f admet un point fixe A alors l'ensemble des points fixes de f est : $A + \ker(L_f - \text{Id}_{\vec{E}})$.
2. Montrer que f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de L_f .
3. Supposons que f soit une symétrie (i.e. $f^2 = \text{Id}_E$) alors montrer que pour tout point $M \in E$, le milieu du segment $[M; s(M)]$ est un point fixe.
4. Représenter les différentes symétries lorsque $\dim(E) = 3$. On fera un dessin pour chaque valeur possible de $\dim \ker(L_f - \text{Id}_{\vec{E}})$

Exercice 11. Soit E un espace affine euclidien et soit f une application affine de E telle qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $M \in E$, la distance de M à $f(M)$ soit égale à c . Que dire de f ?

Exercice 12. Soient \mathcal{P} un plan affine réel et $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une application affine telle que $f^3 = \text{Id}$ et $f \neq \text{Id}$.

1. Montrer que si $A \neq f(A)$, alors $A, f(A), f^2(A)$ sont non alignés.
2. En déduire que f est le produit de deux symétries.

Exercice 13. Soit $f : E \rightarrow E$ affine. On dit que f est une *symétrie-translation* s'il existe une symétrie s et une translation t telles que $f = s \circ t = t \circ s$.

1. Soient F un sous-espace affine de E et \vec{G} un sous-espace vectoriel de \vec{E} tels que $\vec{E} = \vec{F} \oplus \vec{G}$. Soient s la symétrie par rapport à F suivant \vec{G} , et t une translation de vecteur \vec{u} . Montrer que $s \circ t = t \circ s \iff \vec{u} \in \vec{F}$.
2. Soit f une symétrie-translation. Montrer que le couple (s, t) tel que $f = s \circ t = t \circ s$ est unique.

3. Soit f affine quelconque. Montrer que f est une symétrie-translation si et seulement si $f \circ f$ est une translation.
4. En déduire que la composée d'une symétrie et d'une translation est une symétrie-translation.
5. Décomposer l'application f dont l'expression analytique dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est :

$$\begin{cases} x' = (x - 2y - 2z + 1)/3 \\ y' = (-2x + y - 2z + 2)/3 \\ z' = (-2x - 2y + z - 1)/3. \end{cases}$$

Exercice 14.

1. Soit n un entier naturel non nul. On considère (A_1, A_2, \dots, A_n) et (B_1, B_2, \dots, B_n) deux familles de n points du plan dont on note respectivement G et H les isobarycentres.
Montrer que $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_i B_i} = n\overrightarrow{GH}$.
2. (a) Montrer que l'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB) .
(b) Montrer que si les points A, B, C ne sont pas alignés, tout point du plan est barycentre de ces trois points.

Exercice 15. Soient A, B, C, D quatre points du plan affine \mathcal{E} . On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs de AB, AC, AD, BC, CD, DE . On note aussi E, F, G, H les isobarycentres respectifs des points $(B, C, D), (A, C, D), (A, B, D)$ et (A, B, C) . Montrer que les droites $(IM), (JN), (KL), (AE), (BF), (CG)$ et (DH) sont concourantes.

Indication : utiliser la propriété d'associativité des barycentres.

Exercice 16. Soit \mathcal{E} un espace affine réel.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i). le barycentre G de toute famille finie $\{(A_1, \lambda_1), \dots, (A_k, \lambda_k)\}$ de points pondérés de C tels que $\lambda_i \geq 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, appartient à C ,
 - (ii). $\forall M, N \in C, [MN] = \{M + \lambda \overrightarrow{MN} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset C$.
 Une partie vérifiant les conditions précédentes est dite convexe.
2. Soit C une partie convexe de \mathcal{E} . Soit $P \in C$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i). $\forall M, N \in C, P = \text{Bar}((M, 1/2), (N, 1/2)) \Rightarrow M = P = N$,
 - (ii). $\forall M, N \in C, \forall \lambda \in]0; 1[, P = \text{Bar}((M, 1 - \lambda), (N, \lambda)) \Rightarrow M = P = N$,
 - (iii). Le complémentaire C_0 de $\{P\}$ dans C est convexe.

Un tel point P de la partie convexe C , qui ne peut être isobarycentre de deux points distincts de C est appelé point extrémal de C .

Exercice 17.

1. Soit f une application affine d'un espace affine \mathcal{E} dans lui-même telle qu'il existe un entier naturel non nul n pour lequel f^n admet un point fixe A . Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit f une isométrie du plan affine euclidien telle qu'il existe un entier naturel n pour lequel f^n est la rotation de centre A et d'angle $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$. Déterminer f .

Exercice 18. Déterminer toutes les applications affines d'un espace affine \mathcal{E} dans lui-même commutant avec toutes les translations.

Exercice 19. Déterminer les déplacements et les réflexions de l'espace affine euclidien \mathcal{E} laissant globalement invariante une sphère donnée.

Exercice 20.

1. On se place dans le plan affine muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$. Soient D une droite affine d'équation $ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan.
 - (a) On note $H(x, y)$ la projection orthogonale de M_0 sur D . Déterminer les coordonnées de H .
 - (b) En déduire la formule donnant la distance du point $M(x_0, y_0)$ à la droite D (en fonction de a, b, c, x_0 et y_0).
2. On se place désormais dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient P un plan affine d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.
 - (a) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale $H(x, y, z)$ du point M_0 sur P .
 - (b) En déduire la distance du point M_0 au plan P .

Exercice 21.

1. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de \mathbb{R}^3 à coefficients entiers est un nombre entier.
2. On munit \mathbb{R}^3 d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère les points $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ et $C(2, -1, 3)$. Déterminer les points D situés sur la droite passant par O et de vecteur directeur \vec{j} tels que $ABCD$ est un tétraèdre de volume égal à 5.