

**Feuille d'exercices d' Algèbre n° 1**

LOGIQUE ET RAISONNEMENT

**Exercice 1.**

1. **Vrai-faux.** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1.  $(6 < \frac{25}{4}) \Rightarrow (\sqrt{6} < \frac{5}{2})$ .
2.  $(2 = 3) \Rightarrow (4 \text{ est un nombre pair})$ .
3.  $(2 = 3) \Rightarrow (3 = 4)$ .
4.  $\forall x \in \mathbb{R}, ((x \leq 0) \Rightarrow (x - 1 < 0))$ .
5. Pour tout réel  $x$ , on a  $x \leq 0$  donc  $x - 1 < 0$ .

2. **Analyse-synthèse.**

1. Déterminer les réels  $x$  tels que  $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$ .
2. Déterminer les réels  $x$  strictement positifs tels que  $x^{(x^x)} = (x^x)^x$ .

**Exercice 2.**

1. Soit  $P, Q$  et  $R$  trois propositions. Donner la négation des propositions qui suivent.

- (a)  $(P \text{ et } Q) \implies R$ .
- (b)  $P \text{ et } (\text{non}(Q) \text{ ou } R)$ .

2. Montrer que les propositions qui suivent sont fausses.

- (a)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (xy \neq 0 \text{ et } x \leq y) \implies \left(\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$ .
- (b)  $\exists x \in \mathbb{R}, \left((x \leq 0) \text{ et } \left((\sqrt{x^2} \neq -x) \text{ ou } ((x+1)^2 > x^2 + 1)\right)\right)$ .

**Exercice 3.**

1. **Contraposée.** Montrer que, pour toutes propositions  $P$  et  $Q$ ,

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)).$$

2. Montrer que, pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $(x \neq y) \implies ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1))$ .

3. Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que si  $n^2$  est impair, alors  $n$  est impair.

**Exercice 4.**

1. Montrer la **transitivité** de l'implication, c'est-à-dire que, pour toutes propositions  $P, Q$  et  $R$ ,

$$((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \implies (P \Rightarrow R).$$

2. (a) Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \implies (2 \leq x \leq 3)$ .

(b) Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \implies ((x - 1)(10 - x^2) \geq 0)$ .

3. Soit  $P$ ,  $Q$  et  $R$  trois propositions. Démontrer que

$$(P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow P)$$

équivalent à

$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow P).$$

4. Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que sont équivalents :

(a)  $\forall t \in \mathbb{R}, x_0^2 + y_0^2 \leq (t - x_0)^2 + (-t - y_0)^2$ ;

(b)  $x_0 - y_0 = 0$ ;

(c)  $\forall t \in \mathbb{R}, x_0 t + y_0(-t) \leq 0$ .

### Exercice 5.

1. **Absurde.** Montrer que, pour toutes propositions  $P$  et  $Q$ ,

$$(P \Rightarrow Q) \iff \text{non}(P \text{ et non}(Q)).$$

2. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $(-x^4 + x^3 + x - 11 \leq 0) \Rightarrow (-x^4 + x^3 - 9 < 0)$ .

3. Soit  $\mathcal{P} = \{2k; k \in \mathbb{Z}\}$  et  $\mathcal{I} = \{2k + 1; k \in \mathbb{Z}\}$  les ensembles formés respectivement des entiers pairs et impairs. Montrer que  $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$ .

### Exercice 6.

1. Montrer que, pour toutes propositions  $P$ ,  $Q$  et  $R$ ,

$$(P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)) \iff ((P \text{ et non}(Q)) \Rightarrow R).$$

2. Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $(x^3 + x^2 - x - 1 > 0) \Rightarrow ((x \leq -1) \text{ ou } (x^4 > 1))$ .

### Exercice 7.

1. Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels. Nier la proposition

$$(x = 2) \text{ et } ((x + y = 5) \text{ ou } (y \geq 3)).$$

2. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Nier

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, (|x - y| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

3. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de telles fonctions. Nier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, ((n \geq N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)).$$

**Exercice 8.** Examiner la véracité des propositions qui suivent.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0$ .
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, (x \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq 0)$ .
3.  $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$ .
4. Pour tout intervalle ouvert  $I$  borné, on a :  $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset I$ .
5. Pour tout intervalle ouvert  $I$  borné, on a :  $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in I, ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset I$ .
6.  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$ .
7.  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_-^*)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$ .

**Exercice 9.** 1. Écrire l'énoncé qui traduit "La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas croissante".

2. Cet énoncé est-il équivalent à "La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante" ?

**Exercice 10.**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ .

Montrer que si  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ , alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $x_i = 0$ .

2. Soit  $x \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n x_i = x$ .

Montrer qu'il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , tel que  $x_i \leq \frac{x}{n}$ .

**Exercice 11.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|$ . Montrer qu'il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que soit  $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + a)$  soit  $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x + a)$ .

**Exercice 12.** Compléter, lorsque c'est possible, avec  $\forall$  ou  $\exists$  pour obtenir les énoncés vrais les plus forts.

1. ...  $x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ .
2. ...  $x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$ .
3. ...  $x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$ .
4. ...  $x \in \mathbb{N}, x \leq \pi$ .
5. ...  $x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 = 0$ .
6. ...  $x \in \emptyset, 2 = 3$ .

**Exercice 13.** Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

1.  $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$ .
2.  $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7$ .
3.  $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2$ .
4.  $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x^2$ .
5.  $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}, ((x \leq y) \Leftrightarrow (x^2 \leq y^2))$ .
6.  $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, ((xy \leq x^2) \Rightarrow (y \leq x))$ .

**Exercice 14.** On note  $A = [0, 1]$ . Examiner les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont vraies, en donner une démonstration ; sinon, proposer un contre-exemple.

1.  $\forall x \in A, \forall y \in A, (x + y) \in A$ .
2.  $\forall x \in A, \exists y \in A, (x + y) \in A$ .
3.  $\exists x \in A, \forall y \in A, (x + y) \in A$ .

**Exercice 15.** On considère la proposition :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+, \forall z \in \mathbb{R}_+, ((z \leq y) \Rightarrow (z^2 \leq x^2))$ .

L'écrire en français puis décider sa véracité.

**Exercice 16.** Donner une preuve directe et aussi une preuve par récurrence des faits suivants :

1. La somme  $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n$  des  $n$  premiers naturels non nuls est égale à  $\frac{n(n+1)}{2}$ .
2. Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , l'entier  $10^n - 1$  est divisible par 9.

**Exercice 17.** Montrer par récurrence que si  $a \in ]0, 1[$ , alors  $1 - na < (1 - a)^n < 1/(1 + na)$ .

**Exercice 18.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  établir l'inégalité :  $|\sin(n\alpha)| \leq n |\sin \alpha|$  Indication : utiliser la formule  $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ .

**Exercice 19.** On définit, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ . Calculer  $A_{n+1} - 2A_n$ . Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 1$ ,  $A_n$  est divisible par 7.

**Exercice 20.** Trouver une faute dans le raisonnement :

On "montre" par récurrence que  $2^n = (-1)^n$  pour tout  $n$  comme suit. On initialise avec  $n=0$ .

Hérédité : les deux suites sont solutions de  $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$ . Conclusion :  $2^n = (-1)^n$ .

**Exercice 21.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . 1. Calculer  $\sum_{k=1}^n (2k + 1)$ . 2. Montrer que  $\sum_{k=1}^n (k^3) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .

**Exercice 22.**

1. Montrer que pour tout entier  $n \geq 4$ , on a  $n^2 \leq 2^n$ .
2. Montrer que pour toute fonction  $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $j(n) \geq n$ .
3. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite réelle déterminée par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ .  
Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2n + 1$ .
4. Soit  $(v_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par  $v_0 = 1$  et  $v_{n+1} = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  pour tout  $n \geq 0$ . Donner une expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 23.**

1. Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .
2. Calculer  $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ , puis montrer que  $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ .
3. Montrer que  $1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , puis montrer que  $\exists (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ ,  $x^y \notin \mathbb{Q}$ .

**Exercice 24.**

1. Soient  $x$  et  $y$  deux réels distincts de 1. Montrer que si  $x \neq y$ , alors  $\frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$ .
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
3. Montrer que toute fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

**Exercice 25. Pythagore réciproque.** On admet le théorème de Pythagore "direct" :

Si  $ABC$  est un triangle rectangle avec l'angle droit en  $A$ , alors  $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ .

Prouver la réciproque suivante :

Si dans un triangle  $ABC$  on a  $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$  alors le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$ .